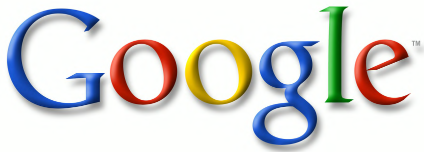
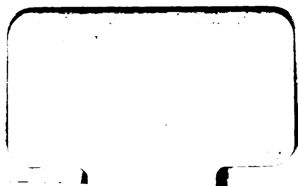



HARVARD
UNIVERSITY
LIBRARY


SIGILLVM ACADEMIAE HARVARDIANAE IN NOV ANG
CHRISTO ET ECCLESIAE
VE RI TAS



Isomorphopolzentrik.

Von

Dr. J. Schick.

Μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω μου τὴν στέγην.

Plato

München und Leipzig.
G. Franzscher Verlag:
Jos. Roth, Königl. u. Herzogl. bayer. Hofbuchhändler.
1908.

Isomorphopolzentrik.

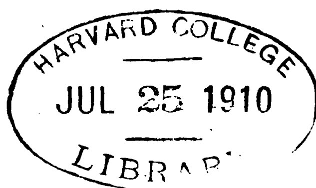
Von

Dr. J. Schick.

Μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰςίτω
μου τὴν στέγην.

Plato.

München und Leipzig.
G. Franzscher Verlag:
Jos. Roth, Königl. u. Herzogl. bayer. Hofbuchhändler
1908.


HARVARD COLLEGE
JUL 25 1910
LIBRARY

Isomorphopolzentrik.

I. Bestimmung der Isomorphole durch die Seitenverhältnisse.

1. Die nachfolgenden Untersuchungen sollen sich in erster Linie auf die Form von Fußpunktsdreiecken beziehen. Sie werden es also zu tun haben mit den Proportionen der Seiten solcher Dreiecke, sowie mit ihren Winkeln; es werden die Eigenschaften der Isogonalzentren ähnlicher Dreiecke, sowie der mit ihnen verwandten Punkte (namentlich ihrer Gegenbrennpunkte) untersucht werden; wichtige Inskriptionsaufgaben, von denen bereits Newton feinsinnige Einzellösungen gegeben hat, sollen hier im Zusammenhang neue Beleuchtung erfahren. Auch werden für die Lehre von den Fußpunktsdreiecken Probleme aufgestellt werden, welche die pedalen Sätze der „Barytomik" als Spezialfälle der Sätze dieser „Isomorphopolzentrik" erscheinen lassen; endlich soll noch manches herangezogen werden, was sich im Zusammenhang mit den angedeuteten Untersuchungen als ergiebig für die weitere Ausgestaltung der Dreiecksgeometrie erweisen mag.

2. Wir betrachten zunächst (Fig. 1) ein beliebiges Fußpunktsdreieck XYZ mit dem Orthogonalzentrum P; das Verhältnis seiner Seiten sei $l:m:n$, seine Winkel seien λ, μ, ν. Man ziehe nun die Geraden PX, PY, PZ nicht mehr unter rechten Winkeln an die Seiten, sondern unter beliebigem gleichen Winkel ξ, in solcher Art jedoch, daß jedesmal Kreisvierecke X_1PY_1C, X_1PZ_1B, Y_1PZ_1A gebildet werden. Dadurch entsteht dann ein neues Dreieck $X_1Y_1Z_1$, zu welchem P das

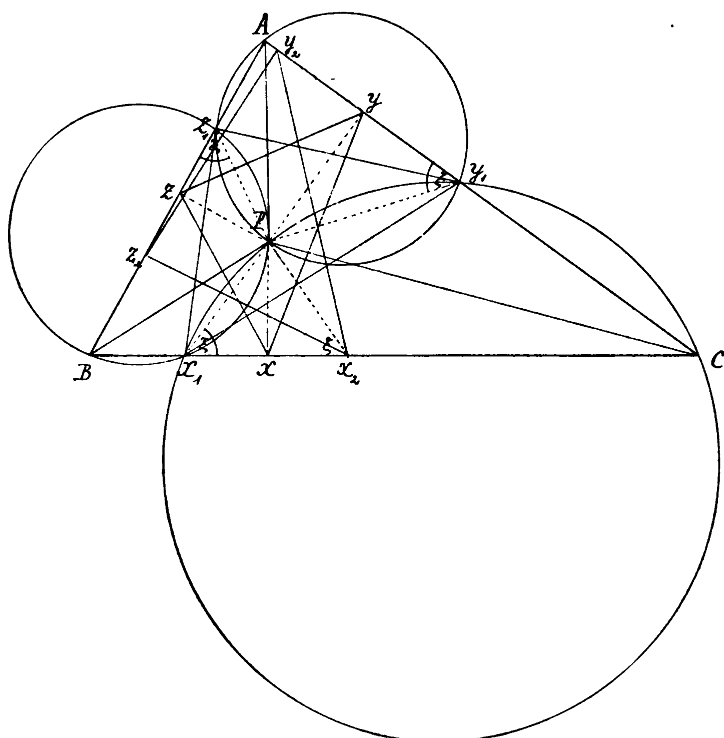


Fig. 1.

„Isogonalzentrum“ ist. Es gilt dann der Lehrsatz, daß Dreieck $X_1 Y_1 Z_1 \sim XYZ$ ist.

Beweis. Der Winkel $Y_1 X_1 Z_1$ besteht aus den zwei Teilen $Y_1 X_1 P$ und $Z_1 X_1 P$; davon ist der erste $Y_1 X_1 P$ wegen des Kreisvierecks $X_1 P Y_1 C$ gleich $PCY_1 = PCY = PXY$, und für den zweiten gilt: $Z_1 X_1 P = Z_1 BP = ZBP = ZXP$; folglich summiert: $Y_1 X_1 Z_1 = YXZ$. Ähnliches gilt natürlich für die anderen Winkel.

Dieser Beweis zeigt zugleich, daß P für alle Dreiecke XYZ, $X_1 Y_1 Z_1$ u. s. w. ein ähnlich liegender Punkt ist.

Für die Größe von $X_1 Z_1$ folgt aus dem Kreisviereck $BX_1 PZ_1$:

$$X_1 Z_1 : BP = \sin\beta : \sin\xi,$$

also:

$$X_1 Z_1 = \frac{BP \cdot \sin\beta}{\sin\xi},$$

und da:

$$XZ = BP \cdot \sin\beta,$$

so ist:

$$X_1 Z_1 : XZ = 1 : \sin\xi,$$

oder:

$$c_{1f} = \frac{c_f}{\sin\xi}.$$

Desgleichen ist natürlich:

$$a_{1f} = \frac{a_f}{\sin\xi} \quad \text{und} \quad b_{1f} = \frac{b_f}{\sin\xi}.$$

Zusatz. Ist umgekehrt, außer dem Grunddreieck ABC, ein beliebiges inskribiertes Dreieck $X_1 Y_1 Z_1$ gegeben, so läßt sich das Isogonalzentrum P leicht finden: es ist einfach der Schnitt der drei Kreise AY_1Z_1, BX_1Z_1, CX_1Y_1, die sich offenbar in éinem Punkte schneiden müssen. Auch der Winkel ξ ist durch die Konstruktion ohne weiteres gegeben.

3. Läßt man nun ξ bei festem P variieren von R bis 0, so durchläuft X_1 die Gerade BC; wir bekommen auf beiden Seiten von PX eine unendliche Reihe von Isogonaldreiecken $X_2 Y_2 Z_2$, $X_3 Y_3 Z_3$ u. s. w., die alle einander ähnlich sind und deren Seiten beständig bis ins Unendliche wachsen. Man nenne den Punkt P wegen der gleichen Form dieser Dreiecke den (l, m, n)-Isomorphopol oder den (λ, μ, ν)-Isomorphopol des Dreiecks, je nachdem man sich die Form durch die Verhältnisse der Seiten, oder durch die Winkel gegeben denkt.

Zusatz. Legt man den Winkel ξ symmetrisch zu PX um, so daß $PX_2X = PX_1X$, also auch $X_2X = XX_1$ u. s. w., so bekommt man offenbar ein Dreieck $X_2Y_2Z_2$, das mit $X_1Y_1Z_1$ kongruent ist; denn aus dem Kreisviereck X_2PZ_2B ergibt sich auch:

$$X_2 Z_2 = \frac{BP \cdot \sin\beta}{\sin\xi} = X_1 Z_1.$$

Man kann also den Punkt P auch als Isogonalzentrum von zwei Reihen kongruenter Dreiecke $X_1 Y_1 Z_1$ und $X_2 Y_2 Z_2$ betrachten, die man rechts und links von den Achsen PX, PY, PZ in unendlich vielen Paaren konstruieren kann. X_1, Y_1, Z_1 bewegen sich dabei in den Richtungen XB, YC, ZA; X_2, Y_2, Z_2 gerade in den umgekehrten Richtungen.

4. Wir betrachten nun zuerst die Verhältnisse der Seiten des Fußpunktsdreiecks etwas genauer. Soll (Fig. 2) $XZ : XY = m : n$ sein, so ist:

$$\frac{BP \cdot \sin\beta}{CP \cdot \sin\gamma} = \frac{m}{n},$$

oder:

$$\frac{BP}{CP} = \frac{m}{n} \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{m}{n} \cdot \frac{c}{b}.$$

Sollen also b_f und c_f ein gegebenes Verhältnis $m : n$ haben, so ist auch $\frac{BP}{CP}$ gegeben. Der geometrische Ort für das Isogonalzentrum P ist also ein apollonischer Kreis zu den Polen B und C, der durch P geht. Sein Zentrum D liegt natürlich auf der Geraden BC; den Umkreis schneidet er rechtwinklig; die Gerade BC aber schneidet er in zwei zu B und C harmonisch gelegenen Punkten E und F so, daß:

$$BE : CE = BF : CF = BP : CP = \frac{m}{n} \cdot \frac{c}{b}.$$

5. Läßt man $BP : CP$ variieren, so bekommt man als Inbegriff der geometrischen Örter für P das gesamte Büschel von Orthogonalkreisen zum Umkreis, die zu B und C als Polen gehören. In der Nähe des Punktes B ist $XZ = b_f$ sehr klein im Verhältnis zu c_f; schrumpft der Orthogonalkreis zum Punkte B zusammen, so ist $b_f : c_f = 0$ (nämlich b_f selbst $= 0$, dagegen $c_f = a_f =$ der Höhe von B auf AC); nimmt man das Zentrum mehr und mehr nach links in der Richtung BD, so wächst das Verhältnis; geht der Orthogonalkreis durch A, so ist $b_f = c_f$: denn dann fällt der Schnittpunkt G in den Fuß-

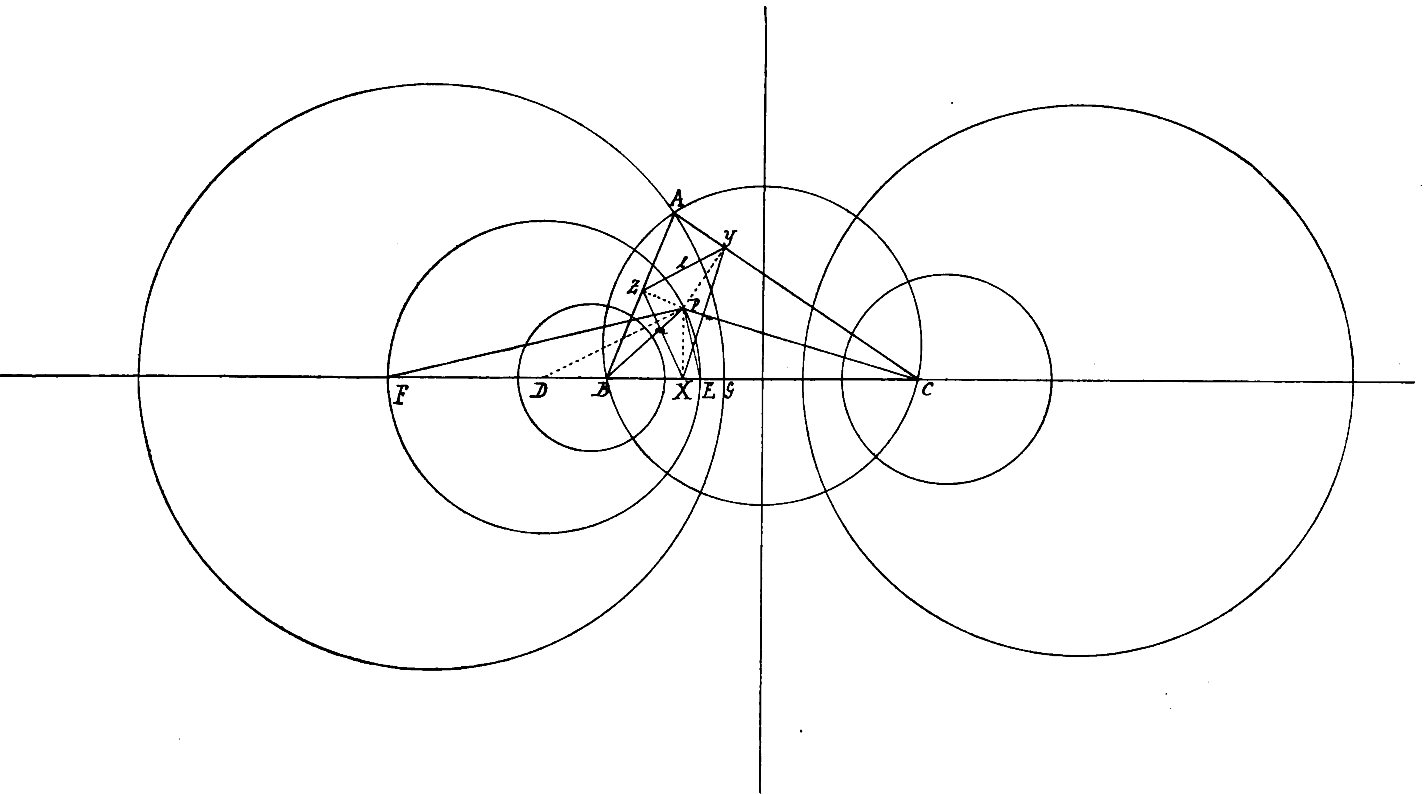


Fig. 2.

punkt der Winkelmediane, also $BP' : CP' = BG : CG = c:b$; also, wenn man die Formel für $BP : CP$ aus § 4 einsetzt:

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{c}{b} = \frac{c}{b},$$

oder:

$$m = n.$$

Für die Kreise über A hinaus wird in Fig. 2 die Seite $c_f > b_f$; speziell für die Mittelsenkrechte auf BC ist $\frac{BP}{CP} = 1$, also:

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{c}{b} = 1 \quad \text{oder} \quad \frac{m}{n} = \frac{b}{c},$$

folglich das Verhältnis von $b_f : c_f$ gleich dem Verhältnis $b : c$ im Urdreieck; für die Kreise auf der Seite von C wird $b_f : c_f$ größer und größer, für den Punkt C gleich ∞.

Wir können auch sagen, daß die Differenz $b_f - c_f$ im Fußpunktsdreieck gleich Null ist für den Orthogonalkreis durch A mit Zentrum auf BC (den ersten „Äquilateralkreis)“, daß dieselbe Differenz positiv ist für Pole außerhalb, negativ für Pole innerhalb des genannten Kreises.

Ganz ähnliches gilt für die Winkel; es muß $\beta_f - \gamma_f = 0$ sein für den ersten Äquilateralkreis, > 0 für Punkte ausserhalb, < 0 für Punkte innerhalb dieses Kreises.

6. Wir konstruieren wieder, wie in § 4, einen apollonischen Kreis zu B und C, der das Seitenverhältnis $b_f : c_f = m : n$ liefert (Fig. 3); sein Zentrum sei D; sein Radius die Tangente DL. Soll nun auch $YZ : XY$ ein gegebenes Verhältnis $l : n$ haben, so erhält man natürlich einen zweiten, bestimmten, apollonischen Kreis zu A und C; sein Zentrum sei E, sein Radius die Tangente EM. Dieser schneidet den für das Verhältnis $m : n$ konstruierten Kreis in zwei Punkten J und J', deren Fußpunktsdreiecke offenbar beide das Verhältnis $l : m : n$ für die Seiten und damit gegebene Form besitzen.

7. Lehrsatz. Die beiden Isomorphopole J und J' liegen auf einer Geraden mit dem Mittelpunkt des Umkreises.

Beweis. DE ist die Zentrale der zwei Orthogonalkreise um D und E; ihre Schnittlinie JJ' steht also auf DE senkrecht. Nun ist:

$$DO^2 - EO^2 = (DL^2 + r^2) - (EM^2 + r^2) = DL^2 - EM^2$$
$$= DJ^2 - EJ^2;$$

folglich steht auch OJ senkrecht auf DE und ist also identisch mit JJ'.

Da der Kreis um D den Umkreis rechtwinklig schneidet, so stehen die Radien OL und OL' senkrecht auf DL und DL', und es ist zugleich $OL'^2 = OJ \cdot OJ' = r^2$; folglich sind die zwei Isomorphopole J und J' reziproke Punkte.

8. LL' ist Polare von D auf den Kreis um O, MM' Polare von E auf den Kreis um O; also schneiden sich LL' und MM' im Pol N von DE auf Kreis O. Natürlich muß N auch auf der Geraden OJJ' liegen und O und N, J und J' sind harmonische Punkte (da LL' Polare zu O in Bezug auf den Kreis um D).

9. Betrachtet man endlich das Verhältnis $YZ : XZ = l : m$, so wird dieses konstant für einen dritten apollonischen Kreis zu A und B. Derselbe muß offenbar auch durch J und J' gehen, da deren Fußpunktsdreiecke bereits das Seitenverhältnis $b_f : c_f = m : n$ und $a_f : c_f = l : n$, also auch $a_f : b_f = l : m$ haben; sein Mittelpunkt wird also der Schnittpunkt F von AB und der Mittelsenkrechten DE von JJ' sein. Natürlich würde die Berührungssehne von F ebenfalls durch den Pol N von DEF gehen.

10. Wir beweisen nun unabhängig von den vorigen Paragraphen, daß zwei reziproke Punkte immer ähnliche Fußpunktsdreiecke haben. Es sei DD_1 ein Durchmesser des Kreises um O (Fig. 4); Q und R seien zwei reziproke Punkte auf demselben. Der Kreis ABC ist also ein apollonischer Kreis zu R und Q (da er über den harmonisch konjugierten Punkten D und D_1 als Durchmesser konstruiert ist); folglich ist:

$$RB : QB = RC : QC,$$

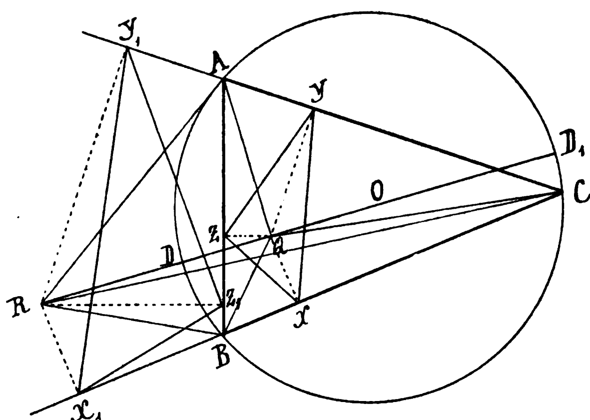


Fig. 4.

also auch:

$$RB \cdot \sin\beta : QB \cdot \sin\beta = RC \cdot \sin\gamma : QC \cdot \sin\gamma;$$

es gilt also für die Seiten der Fußpunktsdreiecke $X_1 Y_1 Z_1$ und XYZ die Relation:

$$X_1 Z_1 : XZ = X_1 Y_1 : XY.$$

Ebensolche Proportionen werden für die anderen Seitenpaare bestehen; also sind die Dreiecke XYZ und $X_1 Y_1 Z_1$ ähnlich.

11. Es gilt auch die Umkehrung dieses Satzes: Wenn zwei Fußpunktsdreiecke die gleiche Form haben, so sind ihre Orthogonalzentren reziproke Punkte.

Denn nun gilt wegen der Ähnlichkeit die Proportion:

$$XZ : X_1 Z_1 = XY : X_1 Y_1,$$

also:

$$BQ \cdot \sin\beta : RB \cdot \sin\beta = CQ \cdot \sin\gamma : CR \cdot \sin\gamma,$$

oder:

$$\frac{BQ}{RB} = \frac{CQ}{RC}.$$

Es liegen also die Punkte B und C auf einem apollonischen Kreise zu R und Q; die Gerade RQ wird von dem Kreise in

D und D_1 im Verhältnis $RB:QB$ geschnitten. Ganz ebenso ist wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke:

$$YZ : Y_1Z_1 = XZ : X_1Z_1,$$

also:

$$\frac{AQ}{AR} = \frac{BQ}{BR},$$

also liegen auch A und B auf einem apollonischen Kreis über QR, der mit dem vorigen identisch sein muß, da das Schnittverhältnis in D und D_1 das gleiche ist.

Man hat also einen Kreis ABC über dem Abstand zweier konjugierter Punkte D und D_1 als Durchmesser; für die Mitte O von DD_1 gilt also $OQ \cdot OR = r^2$; also sind Q und R reziproke Punkte.

12. Spezialfälle. Sollen die drei Seiten des Dreiecks gleich sein, also $l = m = n$, so bekommt man nach § 4:

$$\frac{BP}{CP} = \frac{m}{n} \cdot \frac{c}{b} = \frac{c}{b};$$

die Punkte K und K' (Fig. 5) sind also die Fußpunkte der Winkelhalbierenden AK und AK'; der Kreis über KK' als Durchmesser geht durch A; $DA = DT$ ist Tangente an den Kreis, DEF die Pascalsche Gerade oder „Tangentialachse" des Dreiecks. Die Punkte J und J' selbst, in deren Fußpunktsdreiecken alle drei Seiten gleich sind, sind die „Äquilateralpole" des Dreiecks, die in den „Grundlagen", § 20 ff. und § 123 ff., untersucht worden sind.

Der Pol N der Achse DEF (Fig. 3) wird hier der Lemoinesche Punkt Q.

13. Soll $l : m : n = a : b : c$ sein, so ist:

$$\frac{BP}{CP} = \frac{m}{n} \cdot \frac{c}{b} = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{b} = 1,$$

also liegt P auf der Mittelsenkrechten von BC. Als Orthogonalzentrum bekommt man so den Schnitt der drei Mittelsenkrechten, d. h. das Umkreiszentrum des Dreiecks. Dieses besitzt im Fußpunktsdreieck in der Tat das Seitenverhältnis

$a : b : c$. Der entsprechende zweite Pol, also der reziproke Punkt zu O, liegt in der Unendlichkeit.

14. Soll $l : m : n = t : t' : t''$ (gleich dem Verhältnis der Transversalen) sein, so ist der Lemoinesche Punkt Q das Orthogonalzentrum. Denn nach § 54 der „Grundlagen" ist (vgl. Fig. 5):

$$AQ = \frac{2\,bc \cdot t}{a^2 + b^2 + c^2},$$

also die erste Seite des Fußpunktsdreiecks von Q:

$$a_f = AQ \cdot \sin\alpha = \frac{2\,bc \cdot \sin\alpha}{a^2 + b^2 + c^2} \cdot t = \frac{4\,J}{a^2 + b^2 + c^2} \cdot t.$$

Die Seiten $a_f : b_f : c_f$ verhalten sich also offenbar wie $t : t' : t''$ („Grundlagen", § 44 und 144).

Der reziproke Punkt zu Q, für den diese Eigenschaft auch gilt, ist offenbar der Fußpunkt G der Senkrechten von O auf die Tangentialachse.

Über die Seitenverhältnisse für die „Nebenschwerpole" vgl. unten § 42.

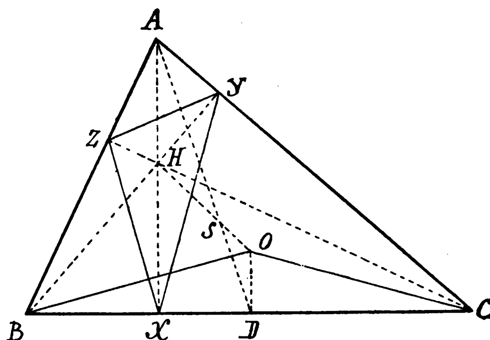


Fig. 6.

15. Für den Höhenschnitt H ist (Fig. 6):

$$YZ = AH \cdot \sin\alpha = 2\,OD \cdot \sin\alpha = 2r \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha = r \cdot \sin 2\alpha;$$

also:

$$a_f : b_f : c_f = \sin 2\alpha : \sin 2\beta : \sin 2\gamma.$$

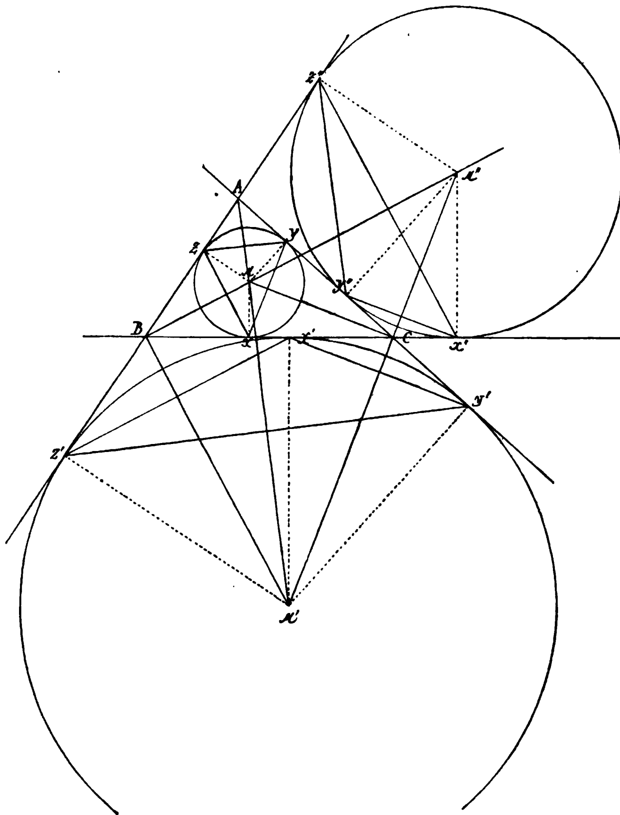


Fig. 7.

16. Für das Zentrum M des Inkreises ist (Fig. 7):

$$\frac{XZ}{XY} = \frac{BM \cdot \sin\beta}{CM \cdot \sin\gamma};$$

allein im Dreieck BMC ist:

$$\frac{BM}{CM} = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}},$$

also:

$$\frac{XZ}{XY} = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} \cdot \frac{2\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}}{2\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}} = \cos\frac{\beta}{2} : \cos\frac{\gamma}{2}.$$

Also haben wir als Seitenverhältnis:

$$a_f : b_f : c_f = \cos\frac{\alpha}{2} : \cos\frac{\beta}{2} : \cos\frac{\gamma}{2}.$$

17. Für den Mittelpunkt des Ankreises M' erhält man (Fig. 7):

$$b_f : c_f = \frac{X'Z'}{X'Y'} = \frac{BM'\cdot\sin\beta}{CM'\cdot\sin\gamma};$$

allein im Dreieck $BM'C$ ist:

$$\frac{BM'}{CM'} = \frac{\sin BCM'}{\sin CBM'} = \frac{\cos BCM}{\cos CBM} = \frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}};$$

also:

$$\frac{b_f}{c_f} = \frac{X'Z'}{X'Y'} = \frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}} \cdot \frac{2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} = \sin\frac{\beta}{2} : \sin\frac{\gamma}{2}.$$

Dagegen ist:

$$a_f : b_f = \frac{Z'Y'}{Z'X'} = \frac{AM'\cdot\sin\alpha}{BM'\cdot\sin\beta};$$

aber:

$$\frac{AM'}{BM'} = \frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}};$$

also:

$$a_f : b_f = \frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}} = \cos\frac{\alpha}{2} : \sin\frac{\beta}{2}.$$

Folglich erhält man für das Zentrum des ersten Ankreises:

$$a_f : b_f : c_f = \cos\frac{\alpha}{2} : \sin\frac{\beta}{2} : \sin\frac{\gamma}{2};$$

für die anderen Ankreiszentren natürlich zyklisch permutierte Formeln.

18. Sollen die Seiten von XYZ sich wie $h : h' : h''$ verhalten, so ist (Fig. 8):

$$\frac{b_f}{c} = \frac{XZ}{XY} = \frac{BP \cdot \sin\beta}{CP \cdot \sin\gamma} = h' : h'' = c : b,$$

also:

$$\frac{BP}{CP} = \frac{c}{b} \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{c^2}{b^2}.$$

Man hat hier also BC innen und außen im Verhältnis $c^2 : b^2$ zu teilen; dies geschieht durch den Strahl AT nach dem Transversalpol, der BC in D' schneidet, und die Tangente AD in A an den Umkreis; der Kreis über DD' als Durchmesser und entsprechende Kreise an den Seiten b und c werden sich in den gewünschten Punkten K und K' schneiden.

II. Bestimmung der Isomorphopole durch die Winkel.

19. Bisher haben wir die Isomorphopole durch die Verhältnisse der Seiten bestimmt. Wir wenden uns jetzt zur Betrachtung der Winkel eines Fußpunktsdreiecks und stellen die Frage: Wann ist der Winkel α_f eines Fußpunktsdreiecks konstant?

Lösung. Offenbar ist (Fig. 9):

$$\angle \alpha_f = YXZ = PXY + PXZ = PCY + PBZ$$
$$= BPC - BAC = BPC - \alpha.$$

Soll also α_f konstant sein, so braucht nur BPC konstant zu sein und das Orthogonalzentrum P liegt auf einem bestimmten Kreisbogen über BC.

Fig. 9.

20. Nimmt man den Punkt P' auf der anderen Seite des Kreisbogens, so ist in dessen Fußpunktsdreieck $X'Y'Z'$ der Winkel $a_f' = Y'X'Z' = P'CY' + P'BZ' = 2R - ACP' + 2R - ABP' = 4R - (ACP' + ABP') = BP'C + BAC = BP'C + a$. Somit ist $\angle a_f + a_f' = BPC - a + BP'C + a = BPC + BP'C = 2R$. Der Supplementarbogen $BP'C$ zu BPC liefert also supplementäres a_f' zu a_f.

Dies gilt auch für den Grenzfall, wo der Kreis zur Geraden BC wird; für die Punkte zwischen B und C wird $a_f = 2R - a$, für die Punkte außerhalb (auch den unendlich fernen Punkt von BC) wird $a_f = a$.

Auf dem Kreis durch A, B, C selbst gilt für den einen (oberen) Bogen $a_f = YXZ = 0$; für den anderen (unteren) Bogen $a_f = Y'X'Z' = 2R$.

21. Man kann den Winkel a_f in noch bequemerer Form ausdrücken. Verlängert man BP bis zum Durchschnitt mit

dem Kreis in D, so ist $BPC - a = BPC - BDC = DCP$. Dieser Ausdruck bleibt natürlich bei variierendem P (und D) konstant, da Minuend und Subtrahend konstant bleiben. Dies gilt auch für den Grenzfall, wo P und D gleichzeitig unendlich nah an C heranrücken; DC wird dann zur Tangente an Kreis O und CP zur Tangente an Kreis O' in C. Der Winkel $BPC - a$ ist also gleich dem Winkel der Tangenten in C an die beiden Kreise O und O', mit anderen Worten, gleich dem Winkel der beiden Kreise selbst.

Somit ist also der Winkel eines Fußpunktsdreiecks gleich dem Winkel des Umkreises mit dem Kreise BPC durch die Endpunkte einer Seite und das Orthogonalzentrum.

Der Winkel der beiden Kreise und somit a_f ist selbstverständlich auch $= \angle OCO'$, da ja OC und $O'C$ senkrecht auf den Tangenten in C an die Kreise stehen.

22. Bei linearer Transformation in der komplexen Ebene bleibt dieser Winkel zwischen zwei Kreisen konstant; daraus ergibt sich der merkwürdige Satz über die Invarianz der Form von Fußpunktsdreiecken bei linearer Transformation, der die Grundlage meines Artikels: „Beziehungen zwischen Isogonalzentrik und Invariantentheorie“ (Sitzungsberichte der K. Bayer. Akademie der Wissenschaften XXX, p. 249—272) bildet.

23. Es gibt nun offenbar noch einen zweiten Kreis, der mit dem Umkreis ABC den gleichen Winkel bildet wie BPC. Sei in Fig. 10 O der Mittelpunkt des Umkreises, O' der des andern Kreises, so ziehe OC und $O'C$, und mache Winkel $OCO'' = O'CO = \xi$. Beschreibt man nun einen Kreis um O'' durch B und C, so ist offenbar der Winkel der Kreise O'' und O gleich dem zwischen O und O'. Nimmt man auf Kreis O'' einen beliebigen Punkt P und konstruiert dessen Fußpunktsdreieck XYZ, so ist:

$$\angle ZXY = PXY - PXZ = PCY - PBZ = PCA - PBA$$
$$= BDC - CPD - PBA = BAC - CPD = a - BPC.$$

Auch hier zeigt sich natürlich, daß $BAC - BPC = BEC - BPC = ECP =$ dem Tangentenwinkel von Kreis O'' und O

Fig. 10.

ist, also auch gleich dem Winkel ξ von Kreis O und O'. Konstruiert man also über BC zwei Kreisbogen, die den Kreis O unter gleichen Winkeln ξ schneiden, so haben die Fußpunktsdreiecke aller Punkte dieser zwei Kreisbogen konstanten gleichen Winkel an der Basis BC.

Doch ist des Genaueren dabei zu beachten, daß nur die Kreisbogen auf der gleichen Seite von BC gleiche Winkel $a_f = \xi$ liefern (so in Fig. 10 die Bogen oberhalb BC); die Kreisbogen nach der anderen Seite (vgl. in Fig. 10 die ge-

strichelten Bogen unterhalb BC) geben $a_f' = 2R - a_f$. In letzterem Falle sind auch die Winkel der gestrichelten Bogen mit dem Umkreis $= 2R - \xi$.

Soll also im Fußpunktsdreieck der Winkel a_f konstant $= \xi$ sein, so besteht der vollständige Ort für das Orthogonalzentrum aus zwei Kreisbogen über BC, die nach derselben Seite zu liegen und mit dem Umkreis gleiche Winkel bilden. Die zwei Supplementarbogen nach der anderen Seite liefern gleiche Supplementarwinkel.

Soll $a_f = R$ sein, so fallen natürlich die zwei Kreise zusammen in éinen, den Orthogonalkreis an den Umkreis durch BC.

24. Um die Variationen des Winkels a_f im Fußpunktsdreieck besser übersehen zu können, dient noch folgende Überlegung. Wir konstruieren (Fig. 11) über BC beliebig viele Kreise, BLC, BMC, BNC, BRC, BSC u. s. w. und kreuzen diese Kreise auf beliebigem Wege, etwa auf einem neuen Kreise $LMNR\ldots$

Für den Kreisbogen $BPLC$ wird nun der Winkel a_f eine gewisse Größe $BPC - a$ haben; für den Kreis M wird BPC kleiner, also auch $a_f = BPC - a$ kleiner; offenbar nimmt a_f ab gegen den Umkreis hin; für einen beliebigen Punkt des Umkreises, etwa A selbst, wird $a_f = YXZ = 0$; der Winkel erreicht hier ein Minimum. Gehen wir über den Umkreis hinaus zu Kreis N, so ist für einen beliebigen Punkt P desselben $a_f = a - BPC$, also zunächst a_f sehr klein, wenn BPC noch sehr wenig von $BAC = a$ verschieden ist; wird nun BPC kleiner und kleiner, indem wir über Kreis R und S der Unendlichkeit zuschreiten, so nähert sich a_f dem Winkel a selbst. Wird der Kreis unendlich groß, so wird er identisch mit der Geraden BC: der Winkel a_f wird für die Teile außerhalb der Strecke BC tatsächlich $= a$ (vgl. oben § 20). Kommen wir nun auf der anderen Seite von der Unendlichkeit wieder herein etwa zu Kreis L', so ist für einen Punkt P auf diesem $a_f = a + BPC$; solange BPC von a sehr wenig verschieden ist, ist a_f sehr nahe gleich a; wächst BPC, indem man sich von L' über M' nach BC zu bewegt, so wächst auch a_f; ist

$BPC = 2R - a$, kommt also P auf dem unteren Bogen BC in die Lage Q, so ist:

$$a_f = a + 2R - a = 2R;$$

für diesen Bogen erreicht $a_f = YXZ$ sein Maximum $2R$.

Zwischen diesem Bogen BC und der Geraden BC liegen die Winkel zwischen $2R$ und $2R - a$; diese nehmen von Q nach U hin abermals ab.

Die schnellste Übersicht gewinnen wir vielleicht vom Punkte Q aus, wenn wir uns erinnern, daß a_f immer gleich dem Kreiswinkel von BPC und BAC ist: für Q ist a_f ein Maximum $= 2R$, von Q gegen L und M nimmt der Winkel stetig ab über a (Zentrum O) gegen Null; auf dem Umkreis erreicht er sein Minimum $= 0$; darüber hinaus wächst er wieder von Null über a (Unendlichkeit) bis zu $2R(Q)$.

Jeden Wert zwischen 0 und $2R$ wird a_f offenbar zweimal erreichen, einmal zwischen Q und A, und ein zweites Mal zwischen A auf dem Weg durch die Unendlichkeit nach Q.

25. Sind nun für ein Fußpunktsdreieck zwei Winkel $a_f = \lambda$ und $\beta_f = \mu$ der Größe nach gegeben, so ist bei gegebenem Grunddreick ABC das Orthogonalzentrum J nach den obigen Ausführungen leicht zu finden. Weil a_f konstant sein soll, muß J einmal auf zwei bestimmten Kreisbogen über BC liegen, die beide den gleichen Winkel ξ mit dem Umkreis ABC bilden (vgl. Fig. 12); ähnlich wird J auf zwei zu Kreis ABC isoklinen Kreisbogen über AC liegen. Diese Kreisbogen schneiden sich in zwei Punkten J und J', die der Aufgabe Genüge leisten.

Wir sehen leicht, daß die beiden Punkte reziprok sind. Denn da ihre Fußpunktsdreiecke nach der Konstruktion beide zwei Winkel $a_f = \lambda$ und $\beta_f = \mu$ gleich haben, so sind diese ähnlich und zu ähnlichen Fußpunktsdreiecken gehören reziproke Orthogonalzentren (vgl. oben § 11).

Zusatz. Die Kreise BJC und CAJ' schneiden sich noch einmal in M, und die Kreise AJC und $BJ'C$ in N; doch liegen die Punkte M und N teilweise auf Supplementarbogen,

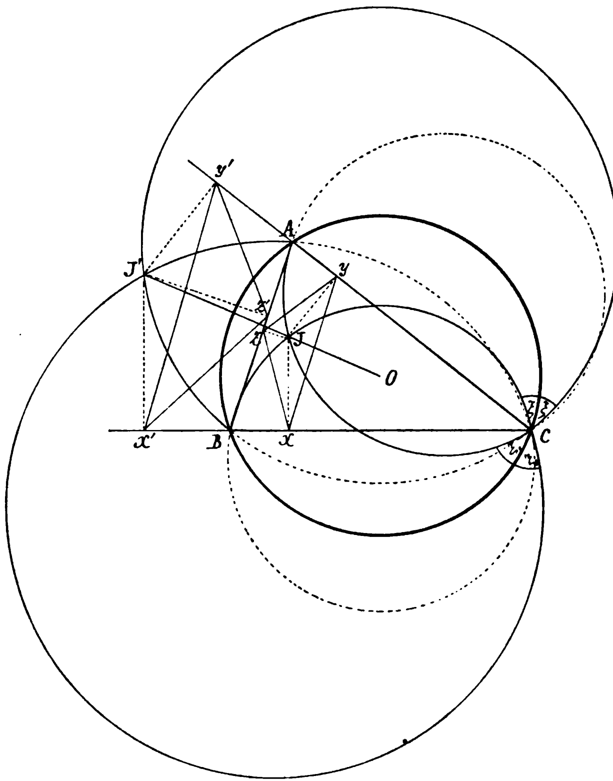


Fig. 12.

und so treten im Fußpunktsdreieck auch Supplementarwinkel auf, wodurch die durch λ, μ, ν bestimmte Form zerstört wird.

26. Sind die Winkel λ, μ, ν nicht an spezielle Seiten gebunden, sondern besteht nur die allgemeine Forderung, daß das Fußpunktsdreieck gegebene Winkel habe, so bekommen wir zusammen nicht weniger als zwölf mögliche Isomorphopole, die sich alsbald in zwei Gruppen von je sechs sondern. Denn es kann z. B. zunächst λ an der Seite a bleiben, während μ und ν ihre Plätze so vertauschen, daß μ an c und ν an b zu liegen kommt. Ferner könen wir λ auf die Seite b legen und

zwar wieder doppelt, nämlich so, daß dabei entweder μ an a und ν an c liegt oder μ an c und ν an a u. s. w. Folgende Tabelle zeigt die möglichen Fälle (vgl. Fig. 13):

a	λ	λ	μ	μ	ν	ν
b	μ	ν	λ	ν	λ	μ
c	ν	μ	ν	λ	μ	λ

Zu jedem der sechs so konstruierten Isomorphopole kann nun noch sein reziproker Punkt als „Antiisomorphopol“ konstruiert werden; je ein solches reziprokes Paar liefert zwei ähnliche Dreiecke mit korrespondierender Lage der Ecken auf den Seiten des gegebenen Dreiecks. So haben wir in der Tat zwölf Isomorphopole, wenn die Winkel λ, μ, ν gegeben sind.

27. Spezialfälle. Ist $\lambda = \mu = \nu$, so fallen je sechs Isomorphopole zusammen, und alle zwölf reduzieren sich auf zwei, nämlich die zwei Äquilateralpole des Dreiecks (vgl. Fig. 5).

28. Sollen λ, μ, ν gleich den Winkeln des Urdreiecks α, β, γ sein, so bekommt man zunächst das Zentrum des Umkreises und seinen reziproken Punkt, der im Unendlichen liegt, zu Isomorphopolen (Fig. 14). Liegen die Winkel in der Reihenfolge β, γ, α oder γ, α, β an den Dreiecksseiten a, b, c, so bekommt man die Brocardschen Punkte und die reziproken dazu. Natürlich tritt dazu noch eine Doppeltriade verwandter Punkte, die die Zwölfzahl voll machen, nämlich P_3 als Schnitt von Kreis AP_1C und AP_2B mit der Winkelfolge α, γ, β im Fußpunktsdreieck, P_4 als Schnitt von AP_2C und BP_1C mit der Winkelfolge β, α, γ; endlich P_5 als Schnitt von AP_1B und BP_2C mit der Winkelfolge γ, β, α; dazu dann noch die reziproken Punkte.

29. Sollen λ, μ, ν gleich den Transversalenwinkeln τ_1, τ_2, τ_3 des Urdreiecks sein, so bekommt man als Isomorphopole unter anderem den Lemoineschen Punkt und seinen reziproken Punkt (vgl. Fig. 5).

30. Von einigem Interesse sind in diesem Zusammenhang etwa noch die Punkte, deren Fußpunktsdreiecke rechtwinklig-gleichschenklig sind, und die wir wegen dieser Gestalt die Deltapole des Dreiecks nennen können. Einen solchen

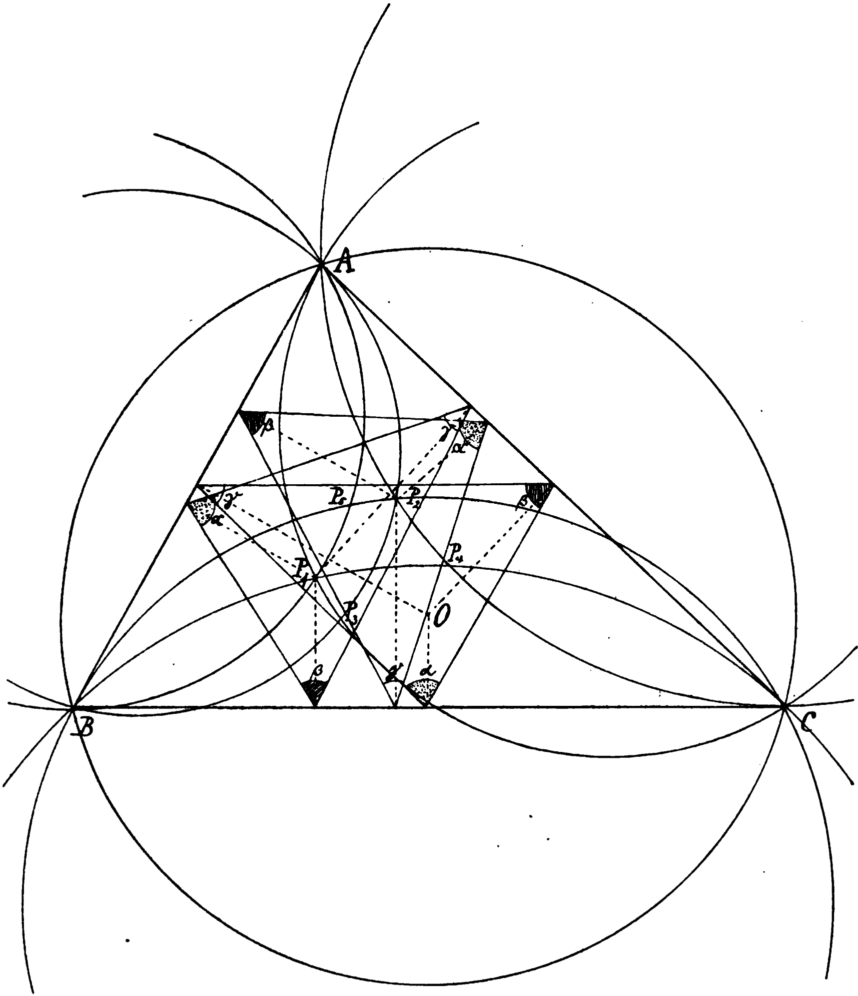


Fig. 14.

Punkt Δ_1 können wir leicht auffinden (vgl. Fig. 15), indem wir etwa den Orthogonalkreis an den Umkreis durch BC konstruieren (sein Zentrum ist der Schnitt G der Tangenten in B und C an den Umkreis) und ihn mit dem Äquilateralkreis durch A (Mittelpunkt D auf BC, AD senkrecht auf dem Kreisradius AO) zum Schnitt bringen. Für die zwei Schnittpunkte Δ_1 und Δ_1', die reziprok sind, hat das Fußpunktsdreieck die verlangte Gestalt: $\angle YXZ$ ist $= R$, und XY ist $= XZ$.

Offenbar lassen sich in ähnlicher Weise zwei weitere Punkte Δ_2 und Δ_3 mit rechten Winkeln an b und c, und dazu deren reziproke Punkte Δ_2' und Δ_3' konstruieren, so daß man also zusammen sechs Deltapole erhält. Je zwei Isomorphopole fallen hier zusammen, da ja zwei Winkel μ und ν gleich (nämlich gleich einem halben Rechten) sein sollen.

III. Die Visierpunkte als Gegenpunkte der Isomorphopole.

31. Zu noch genauerer Einsicht in die Lage der Isomorphopole gelangen wir, wenn wir ihre Gegenbrennpunkte studieren. Wir repetieren zu diesem Zwecke einige bekannte Lehrsätze der Elementargeometrie, und werden diese dann zu den Isomorphopolsätzen der vorausgegangenen zwei Kapitel in Beziehung bringen.

Beschreibt man über den drei Seiten eines Dreiecks ähnliche Dreiecke von beliebiger Form, und verbindet die Ecken des Urdreiecks mit den gegenüberliegenden Spitzen der neuen Dreiecke, so schneiden sich die Verbindungslinien in einem und demselben Punkte.

Wir setzen dabei voraus, daß die ähnlichen Dreiecke zunächst alle nach der dem Urdreieck abgewandten Seite zu konstruiert sind, und daß deren Winkel λ, μ, ν symmetrisch nach der in der Figur angedeuteten Weise angeordnet sind.

Es sei also (Fig. 16) ABC das Urdreieck; über BC ist Dreieck BCL mit den Winkeln λ, μ, ν konstruiert, desgleichen

Dreieck ACM und ABN mit den nämlichen Winkeln über AC und AB, so daß $CAM = BAN = BLC = \lambda$ u. s. w. Dann werden sich AL, BM und CN in einem Punkte schneiden.

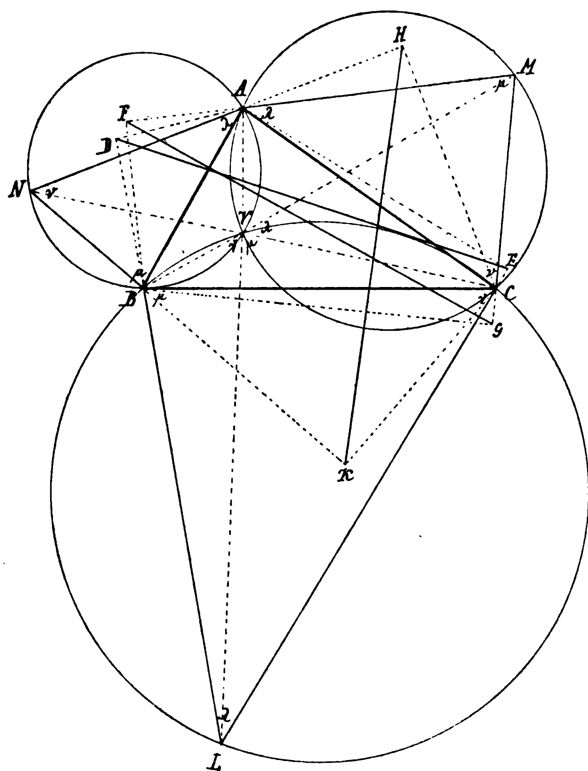


Fig. 16.

Beweis. Man ziehe zunächst AL und CN, die sich in V schneiden mögen. Dann ist:

$$\triangle ABL \sim BCN,$$

weil:

$$\angle LBA = CBN = \beta + \mu,$$

und:

$$BL : BC = \sin \nu : \sin \lambda = AB : BN,$$

also auch:

$$BL : AB = BC : BN.$$

Hieraus folgt, daß auch $\angle BLA = \angle BCN$ und folglich $BLCV$ ein Kreisviereck ist. Deswegen ist auch $\angle BVL = BCL = \nu$ und $CVL = LBC = \mu$.

Da so $\angle LVC$ auch gleich AMC $(= \mu)$ ist, so ist auch $AMCV$ ein Kreisviereck; folglich $\angle CVM = CAM = \lambda = 2R - (\mu + \nu)$, also sind CVM und CVB supplementäre Winkel, und BVM ist eine Gerade.

Da $\angle BVL = \nu = BNA$, ist offenbar auch $AVBN$ ein Kreisviereck. An dem Punkte V liegen offenbar die Winkel λ, μ, ν doppelt, je als Winkel und Scheitelwinkel; die Seiten des Urdreiecks ABC erscheinen von V aus unter den Winkeln $2R - \lambda$, $2R - \mu$, $2R - \nu$; die anderen Seiten der neu konstruierten Dreiecke unter den Winkeln λ, μ, ν selbst. Wir nennen den so gefundenen Punkt V den (λ, μ, ν)-Visierpunkt des Dreiecks ABC.

32. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ABL und BCN folgt auch:

$$AL : CN = BL : BC = \sin \nu : \sin \lambda,$$

oder:

$$AL \cdot \sin \lambda = CN \cdot \sin \nu.$$

Die drei Verbindungslinien AL, BM, CN verhalten sich demnach umgekehrt wie die Sinusse von λ, μ, ν, also:

$$AL : BM : CN = \frac{1}{\sin \lambda} : \frac{1}{\sin \mu} : \frac{1}{\sin \nu}.$$

Oder auch, es gilt die Gleichheit der Produkte:

$$AL \cdot \sin \lambda = BM \cdot \sin \mu = CN \cdot \sin \nu.$$

33. Dies ist natürlich auch leicht geometrisch zu veranschaulichen. Fällt man von A auf BL und CL die Senkrechten AD und AE, ebenso von B auf AM und CM die Senkrechten BF und BG, endlich von C auf AN und BN die Senkrechten CH und CK, so ist:

$$DE = AL \cdot \sin \lambda = BM \cdot \sin \mu = FG = CN \cdot \sin \nu = HK.$$

34. Konstruiert man den Gegenpunkt J zum Visierpunkt V, so enthält dessen Fußpunktsdreieck die Winkel λ, μ, ν.

Beweis. Es sei in Fig. 17 V der Visierpunkt, J sein Gegenpunkt. Dann ist:

$$\angle YXZ = YXJ + JXZ = JCY + JBZ = VCB + CBV$$
$$= CVE = \lambda.$$

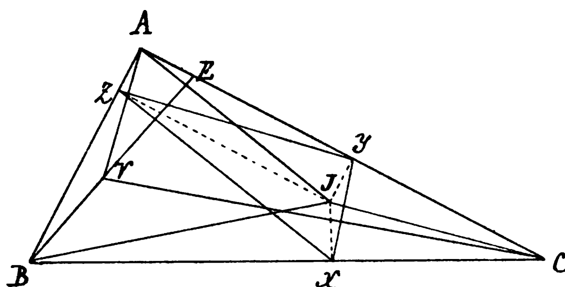


Fig. 17.

Ebenso für die anderen Winkel: es ist $XYZ = \mu$ und $XZY = \nu$. Demnach ist also der (λ, μ, ν)-Isomorphopol Gegenpunkt des (λ, μ, ν)-Visierpunkts.

35. Wir können diesen Satz zur Konstruktion eines Fußpunktsdreiecks benützen, das die Winkel λ, μ, ν — also gegebene Form — besitzt. Man braucht nämlich nur den (λ, μ, ν)-Visierpunkt V des Dreiecks zu konstruieren, indem man die ähnlichen Dreiecke über den Seiten von ABC errichtet; der Gegenpunkt J zu V wird dann das Orthogonalzentrum für das gesuchte Fußpunktsdreieck sein.

Zusatz. Geht man vom Isomorphopol J aus, so findet man V leicht als den Gegenpunkt; von V aus ergeben sich auch einfach die Punkte L, M, N als Schnitt der Kreise BVC mit AV u. s. w.

Konstruiert man die Zentren O, O', O'' der Kreise BCL, ACM, ABN, so hat offenbar auch Dreieck $OO'O''$ die Winkel λ, μ, ν. Denn OO' steht ja senkrecht auf CV, OO''

auf BV; also ist der Winkel von OO' und OO'' das Supplement des Winkels von BV und CV, d. h. $= \lambda$.

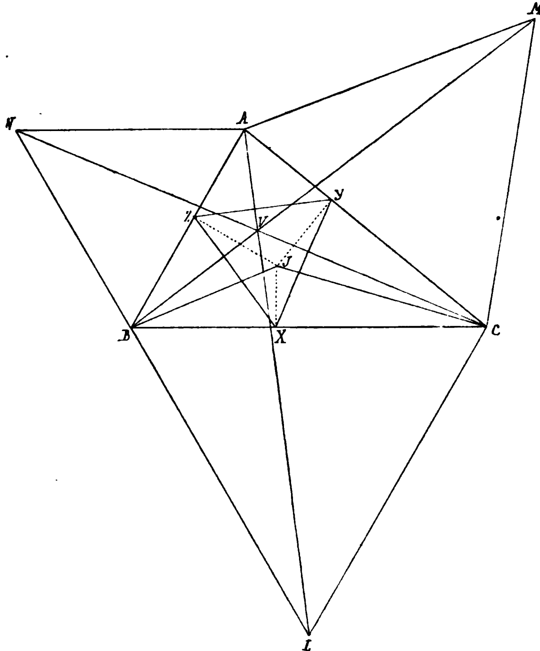


Fig. 18.

36. Spezialfälle. Sind die drei Winkel λ, μ, ν gleich, also jeder $= \frac{2}{3} R$, so sieht man vom Visierpunkt aus die drei Seiten des Dreiecks unter gleichen Winkeln $2R - \lambda = \frac{4}{3} R$ (Fig. 18); wir können diesen Punkt den „Äquivisierpunkt" des Dreiecks nennen. Das Fußpunktsdreieck des Gegenpunkts J muß dann gleichseitig sein, und so haben wir eine neue Konstruktion des Äquilateralpols (vgl. oben § 12). Das Fußpunktsdreieck von V selbst hat die Winkel $\alpha_f = \frac{4}{3} R - \alpha$, $\beta_f = \frac{4}{3} R - \beta$, $\gamma_f = \frac{4}{3} R - \gamma$; es ist also $\beta_f - \gamma_f = \gamma - \beta$ u. s. w.

37. Sehr einfach gestalten sich die Verhältnisse auch für einige andere merkwürdige Punkte des Dreiecks.

Vom Höhenschnitt aus sieht man die Dreiecksseiten unter den Winkeln $2R - \alpha$, $2R - \beta$, $2R - \gamma$; sein Gegenpunkt O

(Mittelpunkt des Umkreises) hat also im Fußpunktsdreieck die Winkel α, β, γ.

Von O aus erscheinen die Dreiecksseiten unter den Winkeln 2α, 2β, 2γ; das Fußpunktsdreieck von H hat also die Winkel $2R-2\alpha$, $2R-2\beta$, $2R-2\gamma$.

Vom Mittelpunkt des Inkreises aus, der sein eigener Gegenpunkt ist, erscheinen die Seiten des Dreiecks unter den Winkeln $R+\frac{\alpha}{2}$, $R+\frac{\beta}{2}$, $R+\frac{\gamma}{2}$; die Winkel des Fußpunktsdreiecks sind $R-\frac{\alpha}{2}$, $R-\frac{\beta}{2}$, $R-\frac{\gamma}{2}$ (vgl. Fig. 7). So entspricht also M sich selbst als Visierpunkt und Isomorphopol.

Vom Schwerpunkt aus sieht man die Seiten natürlich unter den Winkeln der Transversalen $2R-t't''$, $2R-tt''$, $2R-tt'$; das Fußpunktsdreieck des Gegenpunkts (des Lemoineschen Punkts) weist also die Transversalenwinkel des Grunddreiecks $t't''$, tt'', tt' als Dreieckswinkel auf.

38. Vom Interesse sind in diesem Zusammenhang besonders noch die Brocardschen Punkte, insofern sie gegenseitig zueinander je Visierpunkt und Isomorphopol sind. Der eine der Brocardschen Punkte P_1 hat zu Winkeln im Fußpunktsdreieck β, γ, α je an a, b, c (vgl. Fig. 14); vom anderen P_2 erscheinen die Seiten a, b, c unter den Winkeln $2R-\beta$, $2R-\gamma$, $2R-\alpha$. Der zweite Punkt P_2 hat zu Winkeln im Fußpunktsdreieck γ, α, β an a, b, c, während vom ersten P_1 aus die Dreiecksseiten unter den Winkeln $BP_1C = 2R-\gamma$, $AP_1C = 2R-\alpha$, $AP_1B = 2R-\beta$ erscheinen.

39. Bis jetzt haben wir die ähnlichen Dreiecke mit den Winkeln λ, μ, ν alle nach außen konstruiert gedacht. Fast genau die gleichen Überlegungen und Lehrsätze gelten, wenn wir nun (Fig. 19) die Dreiecke BLC, ACM, ABN alle nach innen (nach der Seite des Urdreiecks ABC zu) konstruieren.

Es ist dann nämlich wiederum, wenn man zunächst AL und CN bis zu ihrem Schnitt in V' zieht, $\triangle ABL \sim BCN$ (denn $\angle ABL = \beta - \mu = CBN$, und $BL:BC = \sin\nu : \sin\lambda = AB:BN$, also auch $BL:AB = BC:BN$); folglich ist

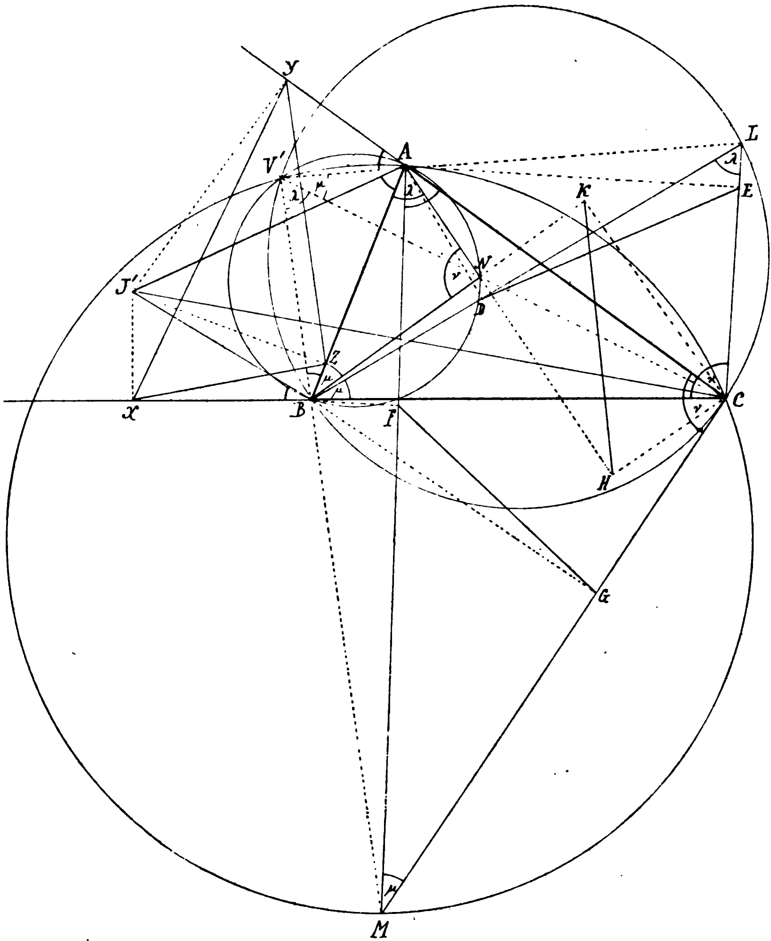


Fig. 19.

auch $\angle BLA = \angle BCN$ und also $BCLV'$ ein Kreisviereck. Daraus folgt, daß auch $\angle CV'B = BLC = \lambda$. Da nun weiter $CV'L = \mu$, und darum auch $= AMC$ ist, so ist auch $AV'MC$ ein Kreisviereck; folglich ist auch $\angle CV'M = CAM = \lambda$. So ist also $\angle CV'B = CV'M$, folglich bilden $V'B$ und $V'M$ eine Gerade.

Aus der Figur ergibt sich nun, daß man vom Punkte V' aus die Seiten BC und AC unter den Winkeln λ und μ sieht, dagegen die dritte Seite AB unter dem Winkel $\lambda + \mu = 2R - \nu$. Die anderen Seiten der neu konstruierten Dreiecke erscheinen ebenfalls unter den Winkeln λ, μ und $\lambda + \mu = 2R - \nu$.

Den Punkt V' nenne man darum den (λ, μ, ν)-Antivisierpunkt des Dreiecks. Ist V' gegeben, so ersieht man aus der Figur, wie man die Spitzenpunkte L, M, N bekommt; man hat nur die Kreise durch V' und je zwei Dreiecksecken zu legen; der Kreis $V'BC$ z. B. ergibt als Schnitt mit der Geraden AV' den Punkt L.

40. Auch in diesem Fall folgt, wie in § 32, aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ABL und BCN:

$$AL : CN = BL : BC = \sin\nu : \sin\lambda,$$

also:

$$AL \cdot \sin\lambda = CN \cdot \sin\nu.$$

Beide Ausdrücke sind natürlich auch $= BM \cdot \sin\mu$, was man auch hier leicht graphisch veranschaulichen könnte, indem wieder $DE = FG = HK$ ist (vgl. § 33).

41. Man konstruiere nun den Gegenpunkt J' zu V' (Fig. 19), indem man $\angle J'AB = V'AY = CAL$, und $\angle J'BA = XBV' = MBC$ macht. Konstruiert man nun das Fußpunktsdreieck von J', so ist in demselben $\angle YXZ = J'XZ - J'XY = J'BZ - J'CY = MBC - V'CB = BV'C = \lambda$. Ebenso würde man finden $\angle Y = \mu$ und $\angle Z = \nu$. Somit hat J' dieselbe Eigenschaft wie J, daß nämlich sein Fußpunktsdreieck die Winkel λ, μ, ν hat; also ist J' identisch mit dem Antiisomorphopol zu J in Fig. 17, und folglich der reziproke Punkt zu J.

42. Beispiele. In den Grundlagen, § 64 ff. habe ich die sogenannten „Nebenschwerpole" behandelt. Der erste derselben, Q, ist nichts anderes als der Pol der Dreiecksseite BC, also der Schnittpunkt der Tangenten in B und C an den Umkreis (Fig. 20); er ist Baryzentrum des Systems $A_{-a^2}, B_{b^2}, C_{c^2}$, Kreise um ihn liefern konstantes $b_f^2 + c_f^2 - a_f^2$ im Fußpunkts-

dreieck. Sein Gegenpunkt ist der Punkt D, welcher ABC (über BC als Diagonale) zum Parallelogramm $ACDB$ ergänzt (Grundlagen, § 71). Betrachten wir Q zunächst als Visierpunkt, so finden wir $\angle BQC = 2R - 2\alpha\,(QBC = \alpha)$; $AQC = QCY - QAC = ACR - BAD = \beta - (ct)$; ähnlich $AQB = \gamma - (bt)$. Die Summe von AQB und AQC ergibt also richtig $\beta + \gamma - (bt) - (ct) = \beta + \gamma - \alpha = 2R - 2\alpha = BQC$. Die Winkel des Fußpunktsdreiecks von Q sind also der Reihe nach: $2R - \alpha$, (ct), (bt).

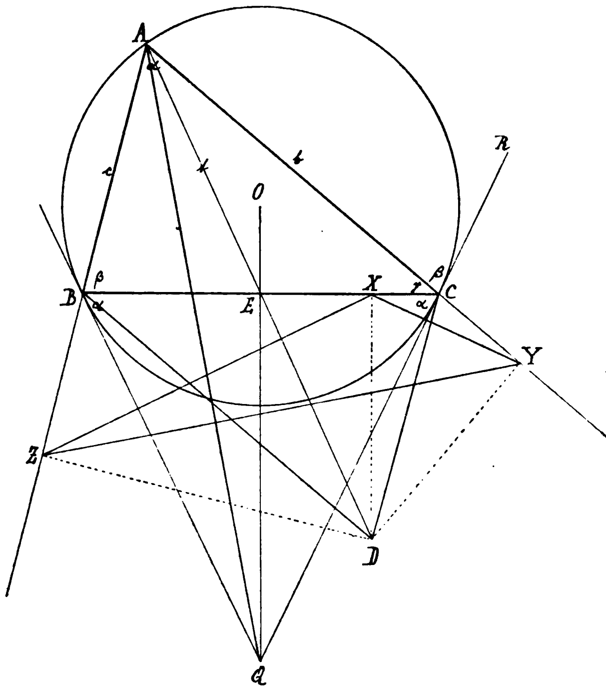


Fig. 20.

Im Fußpunktsdreieck von D ist nun $\angle X = \alpha + BDC = 2\alpha$, also $= 2R - BQC$; $\angle Y = \beta - ADC = \beta - DAB = \beta - (ct) =$ dem Visierwinkel AQC von Q, und $\angle Z = \gamma - ADB = \gamma - (bt) = AQB$.

Ähnliche Entsprechungen würden wir finden zwischen den Visierwinkeln von D und den Winkeln des Fußpunktsdreiecks von Q.

Es sei noch erwähnt, daß die Seiten des Fußpunktsdreiecks von Q sich nach folgender Proportion verhalten: $XZ : XY : YZ = b : c : 2t$ (Grundlagen, § 70). Denn es ist:

$$\frac{XZ}{XY} = \frac{BQ \cdot \sin\beta}{CQ \cdot \sin\gamma} = \frac{b}{c},$$

und:

$$\frac{XZ}{YZ} = \frac{BQ \cdot \sin\beta}{AQ \cdot \sin\alpha} = \frac{\sin(bt)}{\sin\gamma} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{a}{2t} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{b}{2t}.$$

Die Seiten des Fußpunktsdreiecks von D verhalten sich wie $2at : b^2 : c^2$.

43. Die Mittelpunkte der Ankreise entsprechen sich selbst als Visierpunkt und Isomorphopol (ähnlich wie das bei M der Fall ist, § 37). Es ist z. B. tatsächlich für Punkt M' (Fig. 7) der Visierwinkel $BM'C = R - \frac{\alpha}{2}$, $AM'C = \frac{\beta}{2}$, $AM'B = \frac{\gamma}{2}$; die entsprechenden Winkel im Fußpunktsdreieck sind aber je $R + \frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2}$.

44. Während die gegenseitige Lage von Isomorphopol und Antiisomorphopol dadurch bestimmt ist, daß solche Punkte reziprok zueinander sind, bekommen wir Aufschluß über die gegenseitige Lage von Visierpunkt und Antivisierpunkt durch folgenden Satz:

Ist V ein beliebiger Punkt in der Ebene eines Dreiecks, und klappt man die Kreise BVC, AVC, AVB symmetrisch zu den Seiten des Dreiecks um, so schneiden sich die umgeklappten Kreise alle drei in éinem Punkte V' und dieser ist der Antivisierpunkt zu V.

Beweis. Es sei ABC das Grunddreieck, V ein beliebiger Punkt. Wir klappen Kreis BVC um in die Lage des gestrichelten Kreises BX_1C (Fig. 21), so daß die Senkrechten VX und XX_1 gleich sind; in ähnlicher Weise legen wir die

Kreise AVC in AY_1C und AVB in AZ_1B um. Schneiden sich nun die zwei ersten umgeklappten Kreise BX_1C und AY_1C in V', so ist:

$$\angle BV'C = 2R - BX_1C = 2R - BVC,$$

und:

$$\angle AV'C = 2R - AY_1C = 2R - AVC;$$

folglich summiert:

$$\angle AV'B = 4R - (BVC + AVC) = AVB = AZ_1B.$$

Die vier Punkte ABZ_1V' liegen also auf einem Kreis, mit anderen Worten: der dritte umgeklappte Kreis AZ_1B geht ebenfalls durch V'.

Daß der so gefundene Punkt V' der Antivisierpunkt zu V ist, ergibt sich nach dem Obigen ohne weiteres; denn es ist ja $\angle AV'C = 2R - AY_1C = 2R - AVC$, $\angle BV'C = 2R - BVC$, und $\angle AV'B = AVB$.

45. Wir können nun noch beweisen, daß V' auf dem Spiegelkreis von V in Bezug auf die Dreiecksseiten liegt.

Wir haben nämlich bereits in Fig. 21 die Spiegelpunkte X_1, Y_1, Z_1 zu V in Bezug auf die Dreiecksseiten BC, AC, AB konstruiert; die Seiten des Dreiecks $X_1 Y_1 Z_1$ sind natürlich parallel denen des Fußpunktsdreiecks XYZ; der Kreis $X_1 Y_1 Z_1$ ist der Spiegelkreis von V. Sein Zentrum ist bekanntlich der Gegenpunkt J zu V; die Verbindungslinien AJ, BJ, CJ stehen senkrecht zu den Seiten der Dreiecke $X_1 Y_1 Z_1$ und XYZ.

Es ist nun $\angle X_1V'Y_1 = AV'B - AV'Y_1 - BV'X_1 = AZ_1B - ACY_1 - BCX_1 = AVB - ACV - BCV = AVB - ACB = AVB - \gamma = XZY = X_1Z_1Y_1$. Folglich liegt V' auf dem Kreise $X_1Y_1Z_1$.

Natürlich gilt auch umgekehrt, daß V auf dem Spiegelkreis von V' liegt, d. h. auf dem Kreis $X_1' Y_1' Z_1'$, dessen Zentrum J' ist.

46. Spezialisierungen. Gehen wir vom Umkreiszentrum O aus (Fig. 22), so haben wir Kreis BOC, AOC und AOB umzuklappen; der Antivisierpunkt zu O ist O'; von O' aus er-

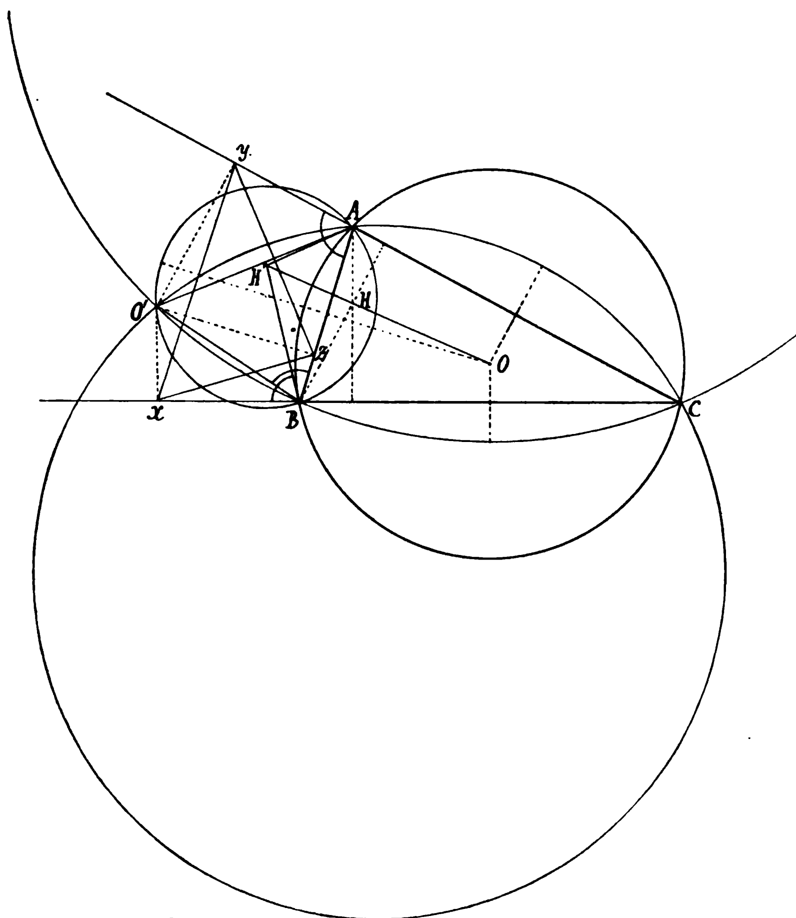


Fig. 22.

scheinen die Seiten a, b, c unter den Winkeln $BO'C = 2R - 2\alpha$, $AO'C = 2R - 2\beta$, $AO'B = 2\gamma$. Der Gegenpunkt zu O' sei H'; dann hat H' zu Winkeln im Fußpunktsdreieck $2R - 2\alpha$, $2R - 2\beta$, $2R - 2\gamma$; H' ist also der reziproke Punkt zum Höhenschnitt, wie es sein muß.

Natürlich ist hier H das Zentrum des Spiegelkreises u. s. w.

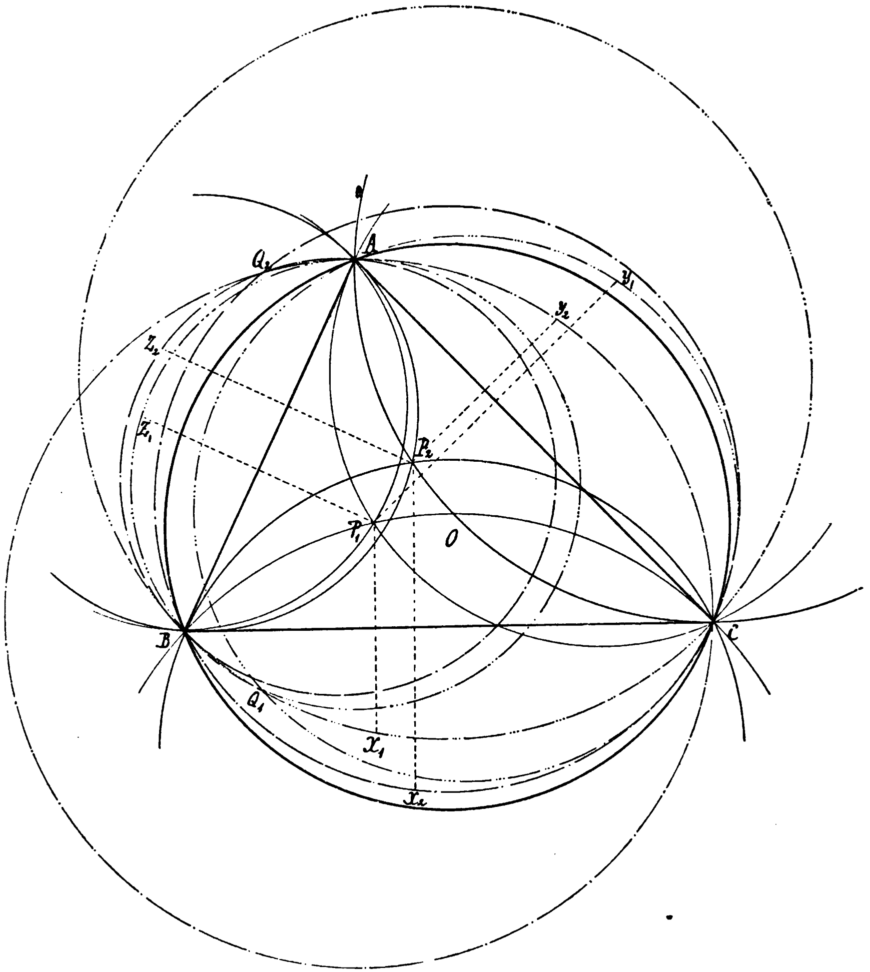


Fig. 23.

47. Klappt man einen Brocard-Punkt um, etwa P_1 in Fig. 23, so erhält man als Antivisierpunkt den Punkt Q_1, der folgende Visierwinkel aufweist: $AQ_1C = 2R - AP_1C = 2R - (\beta + \gamma) = \alpha$; $AQ_1B = 2R - AP_1B = 2R - (\alpha + \gamma) = \beta$, und $BQ_1C = BP_1C = \alpha + \beta = 2R - \gamma$.

Klappt man P_2 um, so erhält man als peritropen Punkt Q_2, für welchen $\angle BQ_2C = 2R - BP_2C = 2R - (\gamma + \alpha) = \beta$; $\angle AQ_2C = 2R - AP_2C = 2R - (\alpha + \beta) = \gamma$, und $\angle AQ_2B = AP_2B = \beta + \gamma = 2R - \alpha$ ist.

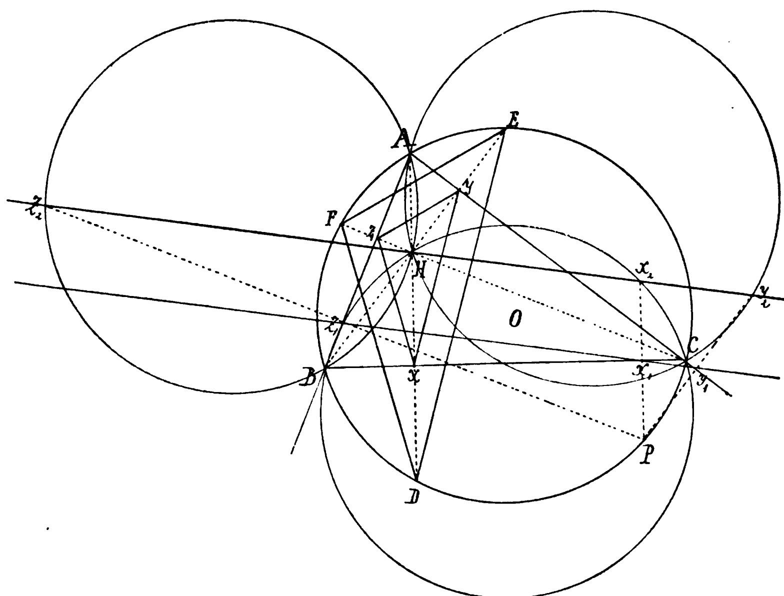


Fig. 24.

48. Bedeutenderes Interesse gewähren die Umklappungen am Höhenschnitt. Die Spiegelpunkte von H auf die Seiten, D, E und F, liegen nämlich auf dem Umkreis (Fig. 24), also wird der Spiegelkreis identisch mit dem Umkreis. Ebenso fallen die drei Kreise BHC, AHC, AHB bei der Umklappung alle drei mit dem Umkreis zusammen. Sonach ist der Antivisierpunkt zum Höhenschnitt irgend ein beliebiger, unbestimmter Punkt P auf dem Umkreis des Dreiecks.

Wenn wir den Gegenbrennpunkt eines solchen Punktes auf dem Umkreis konstruieren wollen, so ergibt sich alsbald, daß er in der Unendlichkeit liegt (als zweiter Brennpunkt einer Parabel), und also in der Tat auch reziprok zu O ist.

Geht man umgekehrt von einem beliebigen Punkt P des Umkreises aus, so liegen dessen drei Fußpunkte in einer Wallace-Geraden X_1, Y_1, Z_1; die Spiegelpunkte X_2, Y_2, Z_2 von P liegen also ebenfalls auf einer Geraden; die Bogen BPC, APC, ABP gehen, wenn umgeklappt, durch den Höhenschnitt H; die Gerade $X_2 Y_2 Z_2$ geht, als Spiegelkreis zu P, ebenfalls durch H.

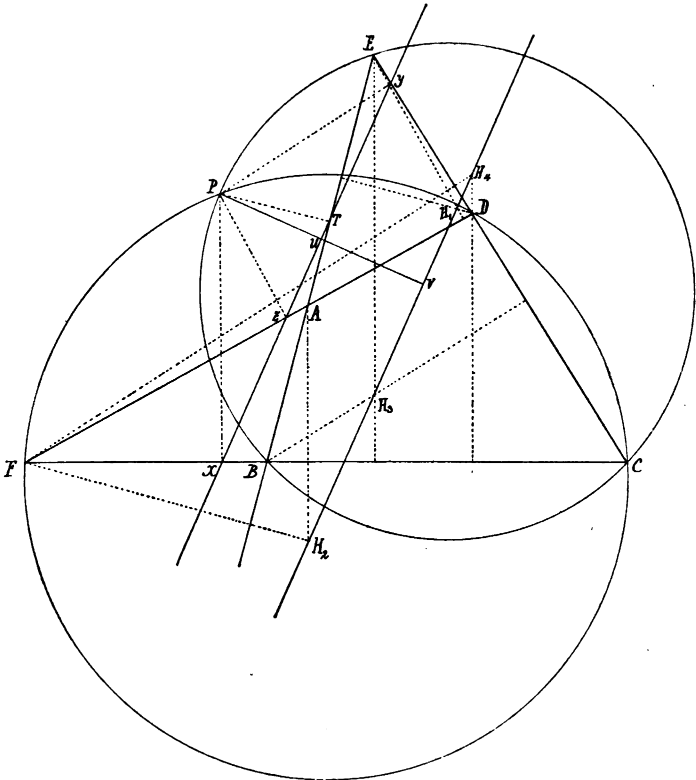


Fig. 25.

49. Die Anwendung hiervon auf das Viereck ergibt alsbald einen berühmten schönen Satz von Steiner. Die Partialkreise eines Vierseits schneiden sich in einem Punkte P (Fig. 25), dessen Fußpunkte auf den vier Seiten X, Y, Z, T in gerader

Linie liegen. Betrachtet man nun P zunächst als Punkt des Kreises um CDF und konstruiert die Fußpunktsgerade von P auf dieses Dreieck, nämlich XYZ, so wird die Spiegelgerade von P in Bezug auf CDF durch den Höhenschnitt des Dreiecks CDF, nämlich H_4, gehen. Machen wir die gleiche Konstruktion an Dreieck BCE, so muß die Spiegelgerade von P an diesem Dreieck, konstruiert über die Fußpunktsgerade XYT, durch den Höhenschnitt von Dreieck BCE, nämlich H_3, gehen. Allein die Fußpunktsgerade XYT muß identisch sein mit XYZ, da sie ja zwei Punkte X und Y gemeinschaftlich haben, und so sind natürlich auch die Spiegelgeraden identisch. Die gleichen Überlegungen gelten für die zwei übrigen Dreiecke ADE und ABF. Dies ergibt den Steinerschen Satz, daß die vier Höhenschnitte der Partialdreiecke eines Vierseits auf einer Geraden liegen, und zwar der Spiegelgeraden des Parabelbrennpunkts V.

Hierüber Weiteres in einer besonderen Abhandlung über das Vierseit.

50. Die vorausgegangenen Sätze geben einfache Mittel an die Hand, um die eng verbundenen Punkte V, V', J, J' zu finden, wenn einer gegeben ist; ebenso sind die Winkel λ, μ, ν und die Dreiecksspitzen L, M, N in jedem Falle leicht zu finden.

Wir wollen z. B. den Visierpunkt V in die etwas aparte Lage in Fig. 26 bringen (nämlich in den Scheitelwinkel von

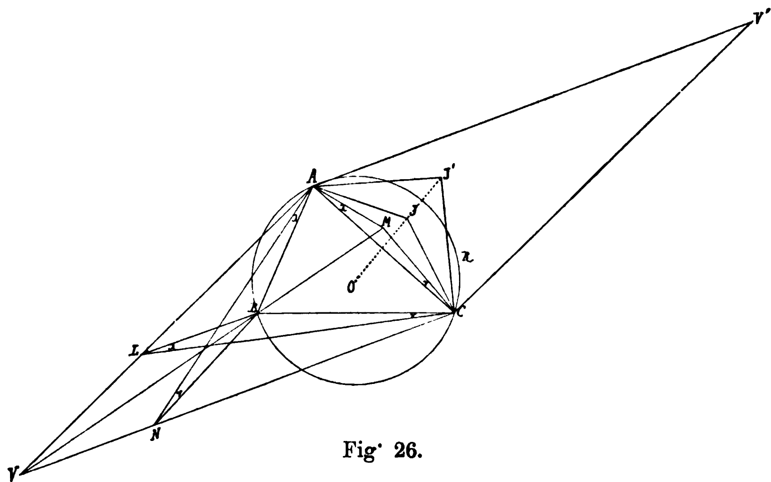


Fig. 26.

ABC = β). Der Kreis *VBC* im Schnitt mit der Geraden *AV* wird den Punkt *L* ergeben; dadurch ist die Form des Dreiecks *LBC* und die Winkel λ, μ, ν gegeben (μ ist hier sehr stumpf = *LBC* = *NBA* = *AMC*); der Gegenpunkt *J* zu *V* mit den Winkeln λ, μ, ν im Fußpunktsdreieck liegt hier innerhalb des Kreissegments *ACR* (*V* und *J* sind Brennpunkte einer Hyperbel, die die Dreiecksseiten berührt); *J'* ist der reziproke Punkt zu *J*; der Gegenpunkt *V'* zu *J'* ist der Antivisierpunkt zu *V*, der diesmal in weiter Ferne von *V* auf dessen Spiegelkreis an *ABC* liegt.

Einige andere Sätze über die Lage von Visierpunkten übergehe ich hier, da sie besser in einer besonderen Abhandlung über höhere Fußpunktsdreiecke untergebracht werden.

IV. Newtoniana.

51. In diesem Kapitel möchte ich zwei Aufgaben behandeln, die für mich vor vielen Jahren der Nukleus gewesen sind, um welchen sich diese ganze „Isomorphopolzentrik" herum gebildet hat. Es sind zwei Aufgaben, die ihre erste Lösung an ganz besonders illustrer Stelle gefunden haben, im ersten Buch jenes *egregium decus gentis Anglorum*, den *Philosophiae naturalis principia mathematica.* Newton hat dort zunächst (Sectio V, Lemma XXVI) die Aufgabe gestellt: „*Trianguli specie et magnitudine dati tres angulos ad rectas totidem positione datas, quae non sunt omnes parallelae, singulos ad singulas ponere.*"

Newton löst die Aufgabe durch Umkehrung. Festgelegt ist nach der Forderung der Aufgabe das Dreieck *ABC* (Fig. 27), und auf seine Seiten sollen die Spitzen des gegebenen Dreiecks *def* gelegt werden. Newton legt nun zuerst (Fig. 28) das Dreieck *DEF* (≃ *def*) fest, und sucht *ABC* in die erforderliche Position *abc* zu bringen. Zu diesem Zweck beschreibt er über den Seiten von *DEF* Kreise mit den Winkeln *A* und *B*, die die Örter für die Ecken *a* und *b* sein sollen. Dann bestimmt er *Ga* als vierte Proportionale zu *AB*, *GP* und *PQ*

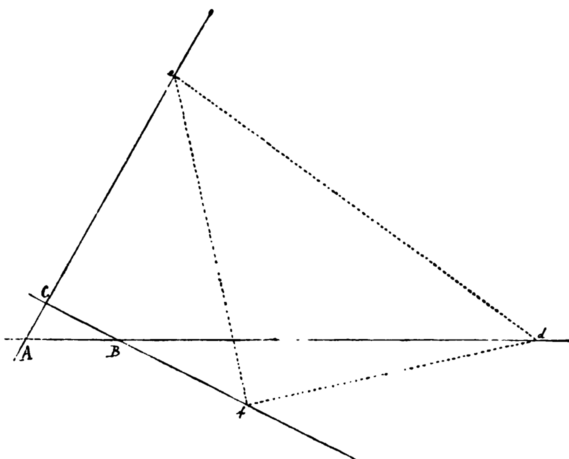


Fig. 27.

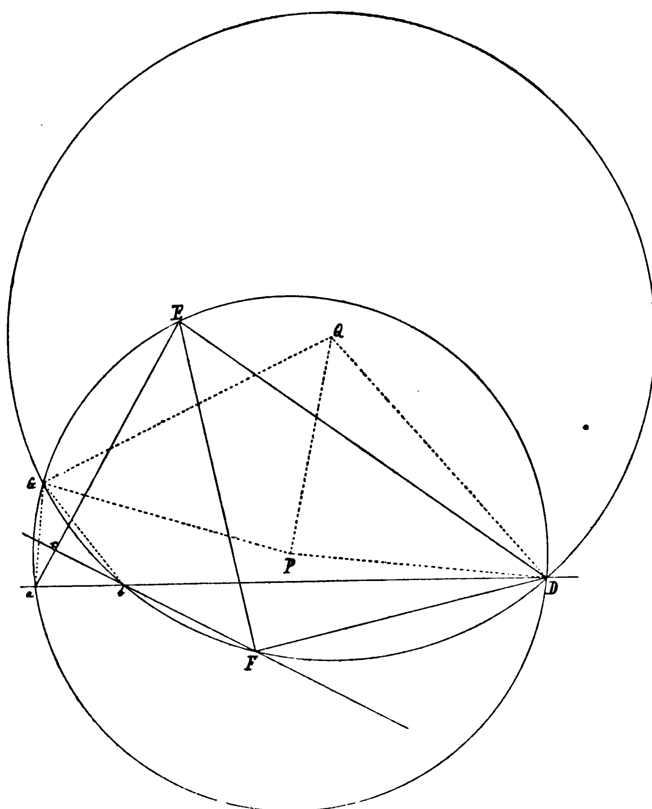


Fig. 28.

(P und Q sind die Zentren der Kreise über DE und DF, G ihr zweiter Schnittpunkt); mit Ga als Radius wird dann ein Kreisbogen um G beschrieben; dadurch wird Punkt a auf Kreis DEG gewonnen, die Verbindungslinien abD, Fbc, acE vervollständigen die Figur. Man hat nun nur die Resultate dieser zweiten Figur (28) auf die erste (27) zu übertragen, und die Aufgabe ist gelöst.

52. Es zeigt sich, daß Newtons Konstruktion (und Beweis) sich auf folgende Analysis gründen. Wenn man die Kreisbogen über DE und DF (mit dem zweiten Schnitt in G) konstruiert hat, so handelt es sich im wesentlichen nur noch darum, durch den gegebenen Punkt D eine Gerade Dba so zu legen, daß zwischen den zwei Kreisbogen ein Stück von gegebener Länge (ab) interzipiert wird.

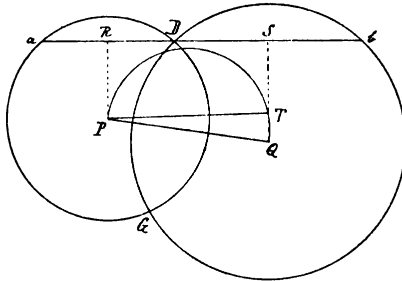


Fig. 29.

Diese bekannte Elementaraufgabe lösen wir jetzt meist so, daß wir (Fig. 29) von P und Q Senkrechte auf ab fällen; dann ist $RS = \frac{1}{2}\, ab = PT$. Hierdurch ist Dreieck PTQ gegeben, also auch $\angle\, TPQ$ (in doppelter Lage, bei P und bei Q); die Parallelen durch D mit PT und QT' ergeben die Lage von ab.

Newtons Lösung wird durch Fig. 30 und 31 veranschaulicht: Dreieck PGQ ist $\sim Gab$ (ich behalte Newtons Bezeichnungsweise, und in Fig. 31 auch seine Konfiguration, möglichst genau bei); denn $\angle\, QPG = DaG$ und $\angle GQP = abG$. Es gilt also wegen der Änlichkeit der Dreiecke die Proportion:

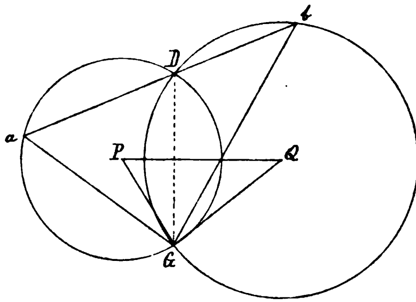


Fig. 30.

$$\frac{Ga}{ab} = \frac{GP}{PQ}.$$

Hierdurch ist Ga bestimmt. Von einer genaueren Determination hat Newton abgesehen. Doch bemerkt er schon in der Fassung der Aufgabe, daß nicht alle drei Geraden parallel sein sollen. Denn dann ist die Aufgabe im allgemeinen nicht möglich. Es lassen sich dann wohl unendlich viele Dreiecke gegebener Form auf die drei Geraden legen; allein keines der Dreiecke läßt sich im allgemeinen auf gegebene Größe bringen.

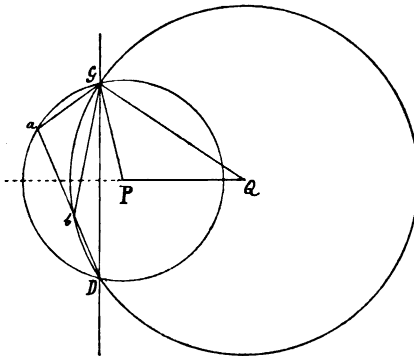


Fig. 31.

53. Während Newtons Lösung auf einer Umkehrung beruht, kann man nun die Aufgabe mittelst der vorangegangenen

Sätze auch ganz gut direkt lösen. Wenn die Winkel des gegebenen aufzulegenden Dreiecks λ, μ, ν sind, so brauchen wir, um eine Lösung zu erhalten, nur einen (λ, μ, ν)-Isomorphopol zu konstruieren. Dessen Fußpunktsdreieck hätte bereits die verlangte Form; um den Drehungswinkel ξ zu finden, der etwa der Seite $X_1 Z_1$ auch die verlangte Größe gibt, benützt man einfach die Proportion aus § 2:

$$\frac{\sin \xi}{BP} = \frac{\sin \beta}{X_1 Z_1}.$$

Den Isomorphopol selbst kann man doppelt bestimmen: erstens, indem man die Kreisbogen über den Seiten beschreibt, die mit dem Umkreis die Winkel λ, μ, ν bilden; zweitens, indem man über den Seiten des Dreiecks ähnliche Dreiecke mit den Winkeln λ, μ, ν errichtet, durch die Verbindungslinien AL, BM, CN den (λ, μ, ν)-Visierpunkt V und dann dessen Gegenpunkt, den (λ, μ, ν)-Isomorphopol bestimmt.

Nach dem Vorausgegangenen ergibt sich die Determination einfach. Man kann den Strahl mit dem Winkel ξ nach links und rechts legen (in die Lage PX_1 oder PX_2), vgl. § 3, Zusatz; man bekommt also an jedem (λ, μ, ν)-Isomorphopol zwei Lösungen unserer Aufgabe. Da es zwölf solcher Pole gibt (§ 26), so bekommen wir zusammen also 24 Lösungen. Dabei ist dann freilich vorausgesetzt, daß die Winkel λ, μ, ν nicht an bestimmte Seiten gebunden sind, während Newton diese Restriktion schon in der Fassung seiner Aufgabe forderte.

54. In der Barytomik wurde § 24 die Aufgabe gelöst: Zwischen die Seiten eines Dreiecks ABC die Gerade ZXY so zu legen, daß die von den Dreiecksseiten interzipierten Stücke der Geraden gegebene Größe haben.

Man sieht jetzt alsbald, daß dies nur ein Spezialfall der eben behandelten Aufgabe ist; das Dreieck ZXY hat immer noch gegebene Seiten m, n, $m+n$, die Winkel aber sind speziell 0, 0, $2R$. Auch sind die dort gegebenen Lösungen, die direkte und die indirekte, im wesentlichen nichts anderes als Spezialisierungen der hier für die allgemeinere Aufgabe gegebenen

Lösungen. Schon Newton hat die spezielle Aufgabe in einem Korollar zu der allgemeinen kurz behandelt: „*Hinc recta duci potest cujus partes longitudine datae rectis tribus positione datis interjacebunt . . . et applicando constructionem praecedentem ad hunc casum solvetur problema.*“

55. Direkt danach ist in der Barytomik (§§ 25 und 26) die Aufgabe behandelt worden: Zwischen die Seiten eines Vierecks eine Gerade so zu legen, daß die von den Seiten interzipierten Stücke gegebenes Verhältnis haben.

Auch dies ist offenbar ein Spezialfall der allgemeineren Aufgabe: Auf die Seiten eines gegebenen Vierseits ein anderes von gegebener Form zu legen. Newton stellt diese Aufgabe direkt hinter der ersten im Lemma XXVII: „*Trapezium specie datum describere, cujus anguli ad rectas quatuor positione datas, quae neque omnes parallelae sunt, neque ad commune punctum convergunt, singuli ad singulas consistent.*“

Er löst auch diese Aufgabe an erster Stelle durch Umkehrung. Gegeben sind in Wirklichkeit die vier Geraden AD, AB, BD, CE (Fig. 32a) und auf sie soll das Vierseit $fghi$ von gegebener Form gelegt werden. Newton beginnt mit dem Vierseit $FGHJ$ (Fig. 32b) und sucht die vier Geraden AD, AB, BD, CE in richtiger Lage durch die Punkte F, G, H, J zu legen. Offenbar bekommt man als Ort für die Punkte a, b, c (welche A, B, C entsprechen) Kreise über FG, FH, FJ, und es handelt sich jetzt in der Hauptsache darum, etwa durch F eine Gerade $Fabc$ so zu ziehen, daß die Stücke ab und bc zwischen den Kreisperipherien gegebenes Verhältnis haben.

Konstruiert man den Mittelpunkt P für den Kreis GFS und Q für Kreis HFT (die beiden Kreise mögen sich, außer in F, auch in K schneiden), so ist $\angle KPL = FaK$, $\angle KQL = FbK$; also $\angle PKQ = LPK - LQK = FaK - FbK = aKb$.

Macht man nun $\angle QKR = bKc$, so ist $\angle QRK = PQK - QKR = FbK - bKc = FcK$; folglich ist R der Mittelpunkt eines Kreises, der durch F, K und c geht. Diesen Mittel-

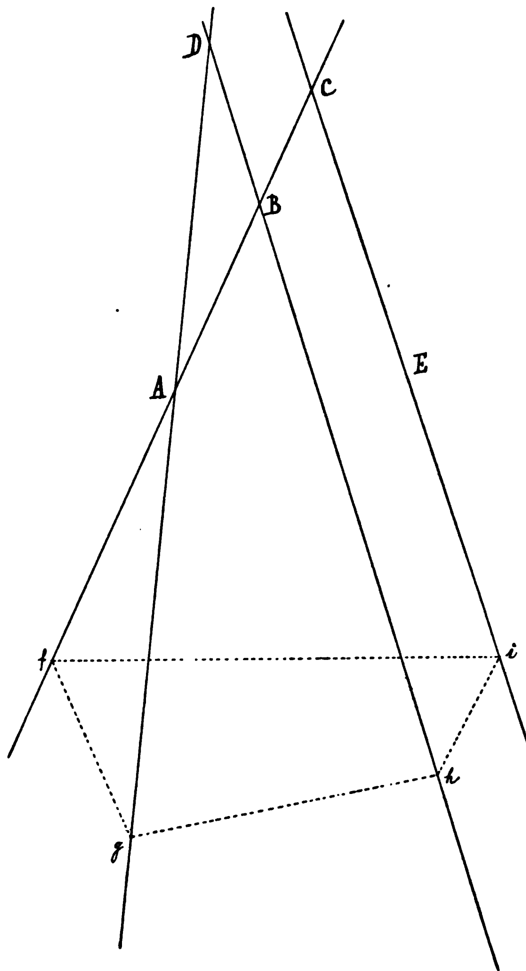


Fig. 32a.

punkt können wir unschwer bestimmen; wegen der Ähnlichkeit der Konfiguration $PQRK$ und $abcK$ ist nämlich:

$$\frac{QR}{QP} = \frac{bc}{ab},$$

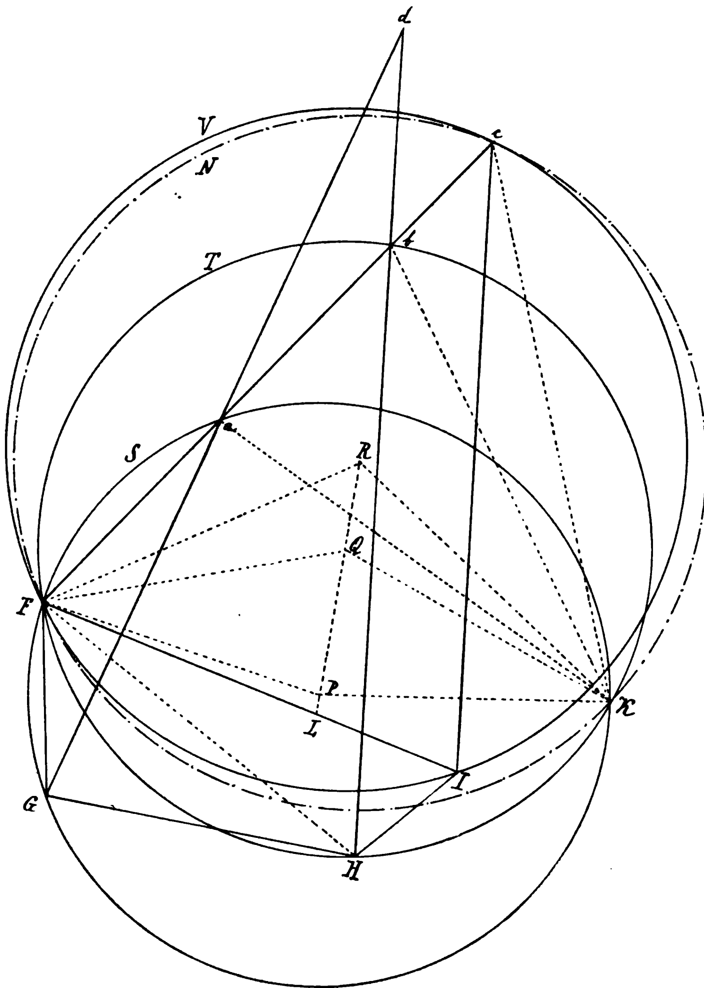


Fig. 32 b.

folglich QR als vierte Proportionale zu QP, bc und ab bestimmt.

Hat man also die Kreistriade über FG, FH, FJ konstruiert, so ziehe man die Zentrale PQ der beiden ersten Kreise, bestimme dann auf dieser Linie den Punkt R nach der ange-

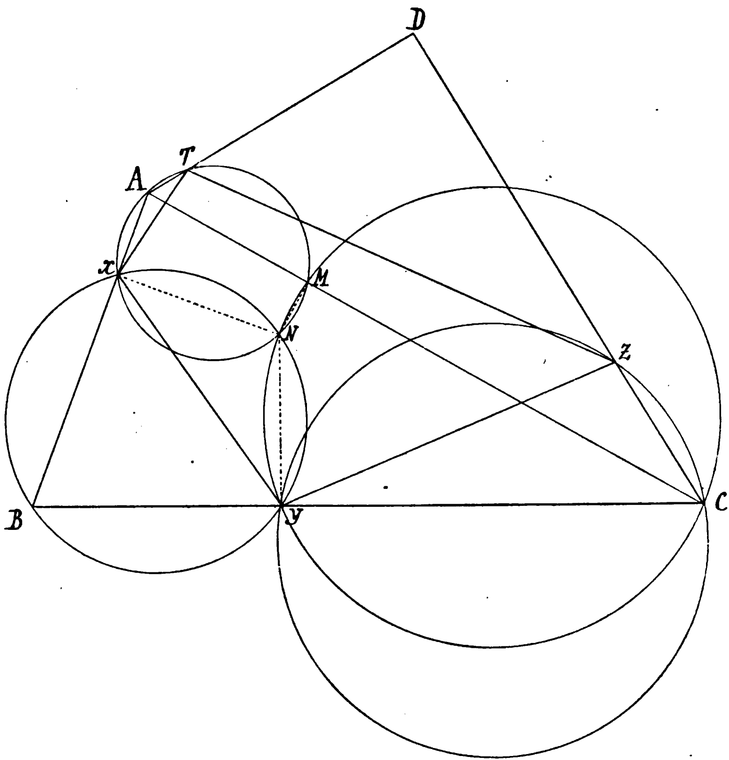


Fig. 33.

gebenen Proportion, und beschreibe von R aus mit RF als Radius den Kreis RFK. Dieser wird den dritten Kreis der Triade in c schneiden; dadurch ist $Fabc$ gegeben, also auch aG, bH, cJ. Man übertrage nun die in der Figur gewonnenen Resultate in richtiger Ordnung auf die Figur links, so ist die Aufgabe gelöst.

Dies ist ungefähr die Form der Analysis, die wir aus Newtons Konstruktion und Beweis erschließen können.

56. Zunächst möchte ich nun noch eine andere indirekte Lösung der Aufgabe angeben. Es soll also wieder die Aufgabe sein (Fig. 33), das Viereck $XYZT$ von gegebener Form dem

gegebenen Viereck $ABCD$ einzuschreiben. Wenn wir die Aufgabe umkehren und ein Viereck $XYZT$ von der verlangten Form festlegen, so werden die geometrischen Örter für die Ecken A, B, C, D eines umzubeschreibenden gegebenen Vierecks Kreise über den Seiten von $XYZT$ sein, die die Winkel A, B, C, D fassen. Wir konstruieren zuerst etwa die Kreise über XY und XT, die sich in N schneiden mögen. Dann ziehen wir die Diagonale AC, die den festgelegten Kreis AXT in M treffe. Da nun die Form des Dreiecks ABC bekannt ist, so kennt man Winkel $BAC = XAM$; in dem Kreise AXT ist also der Punkt M festgelegt (man braucht nur beliebig von X über A' den Winkel $XA'M = BAC$ in den Kreis zu legen). Weiter können wir nun zeigen, daß $MNYC$ ein Kreisviereck ist. Denn $\angle XNY = 2R - ABC$, $\angle XNM = 2R - XAM$; also $MNY = 4R - (XNM + XNY) = BAC + ABC = 2R - YCM$. Nun kennen wir aber die drei Punkte M, N, Y; wir können also den Kreis MNY ohne weiteres konstruieren und haben dadurch einen geometrischen Ort für C. Der zweite Ort ist der Kreis über YZ mit dem bekannten Peripheriewinkel YCZ.

So bekommen wir also folgende Konstruktion: Ziehe über XT, XY und ZY die Kreisbogen mit den Winkeln A, B, C (die beiden ersten mögen sich in N schneiden); ziehe beliebig XA' nach einem Punkt A' der Peripherie von XAM und mache $XA'M$ gleich dem gegebenen Winkel BAC: dadurch bekommen wir Punkt M auf Kreis AXT. Zeichne nun den Kreis MNY und bringe diesen zum Schnitt mit dem Kreis über YZ; dies liefert Punkt C. Jetzt ziehe CY bis zum Schnitt mit Kreis XNY in B, dann BX bis zum Schnitt A mit Kreis AXT; endlich AT und CZ, die sich in D schneiden. Damit ist die Figur perfekt.

57. Mit Hilfe der Isomorphopolzentrik können wir aber auch eine einfache direkte Lösung der Newtonschen Aufgabe bewerkstelligen.

Nach § 2, Zusatz, schneiden sich die Kreise AXT, BXY, FTY (Fig. 34) in einem Punkte P_1, der der Isomorphopol für die

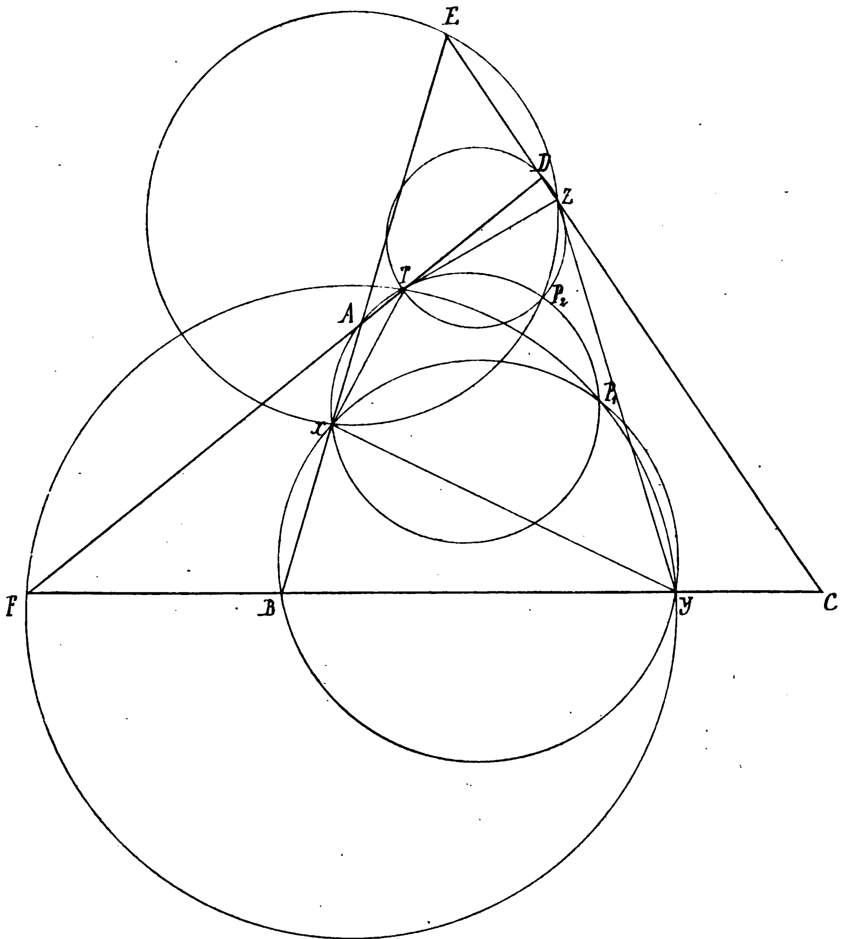


Fig. 34.

(gegebene) Form von Dreieck XYT sein wird. Ebenso schneiden sich die Kreise AXT, DTZ und EXZ in einem Punkte P_2, dem Isomorphopol für die ebenfalls gegebene Form des Dreiecks XTZ. Man hat also nur die beiden Isomorphopole zu konstruieren; der Kreis AP_1P_2 schneidet dann ohne weiteres die Punkte X und T auf den Vierecksseiten AB und AD aus.

Kreis FTP_1 gibt Punkt Y auf BC, und Kreis XP_2E gibt Punkt Z auf CD.

Determination. Nehmen wir P_1 und P_2 als eindeutig in bestimmtem Sinn festgelegt an, so bekommt man für die Kombination dieser zwei Punkte nur eine Lösung; denn Kreis AP_1P_2 und die Punkte T, X, wie Kreis FTP_1 und Y, Kreis EXP_2 und Z sind eindeutig bestimmt. Nun gibt es aber bei allgemeinster Fassung der Aufgabe 12 Pole P_1 und 12 Pole P_2; jeder kann beliebig mit einem anderen verbunden werden, was auf $12 \times 12 = 144$ Lösungen schließen läßt. Dabei ist jedoch ganz allgemein angenommen, daß die gegebenen Winkel λ, μ, ν des Dreiecks XTY sowie die Winkel λ', μ', ν' des Dreiecks XTZ sich in ganz beliebiger Lage an den Seiten des gegebenen Vierecks und gegeneinander befinden; das Viereck $XTZY$ ist dabei einfach aufgefaßt als Zusammensetzung der zwei Dreiecke XTY und XTZ, die eine gemeinschaftliche Basis XT haben.

Ist die Form von $XTZY$ und die Lage seiner Ecken auf $ABCD$ bestimmt und eindeutig vorgeschrieben, so reduziert sich die Anzahl der Lösungen ganz wesentlich. Es gibt dann nur zwei reziproke Punkte P_1 und P_2 als Isomorphopole für XTY und zwei reziproke Punkte Q_1 und Q_2 für XTZ; aus beiden Gruppen lassen sich nur vier Paare P_1Q_1, P_1Q_2, P_2Q_1, P_2Q_2 bilden, die je mit A zusammen einen Kreis APQ und dadurch eine bestimmte Seitenlage XT ergeben. Und auch so werden die Dreiecke XTY und XTZ noch auf die eine oder die andere Seite von XT fallen können, so daß man also nur auf zwei Vierecke $XYZT$ rechnen darf, die dem gegebenen Viereck tatsächlich ähnlich sind.

Auf Spezialisierungen verzichte ich an dieser Stelle; wie ich kaum mehr zu repetieren brauche (vgl. oben § 55, Anfang), ist z. B. die in der Barytomik, § 25 gestellte Aufgabe ein besonderer Fall der eben behandelten. Newton hat dies in einem Korollar so ausgedrückt: „*Hinc recta duci potest cujus partes, rectis quatuor positione datis dato ordine interjectae, datam habebunt proportionem ad invicem.*“ Bei dieser Spezialisierung

fallen die Isomorphopole P_1 und P_2 auf Kreis ABF, Q_1 und Q_2 auf Kreis ADE zusammen. Es gibt dann nur einen Kreis APQ und nur eine Lösung der Aufgabe.

Eine andere Lösung der speziellen wie der allgemeinen Aufgabe sehe man bei Newton selbst nach. Auch sagt Newton am Schluß von Lemma XXVII: „Problematis hujus solutiones alias *Wrennus* et *Wallisius* olim excogitarunt.“ Also auch Sir Christopher Wren, der Erbauer der St. Paulskathedrale und Rektifikator der Zykloide, sowie John Wallis, berühmt als Mathematiker und Philologe, haben ihren Scharfsinn dieser geometrischen Aufgabe gewidmet. Le Seur und Jacquier erwähnen diese Lösungen von Wren und Wallis in ihrem Kommentar zu den Principia jedoch nicht; leider fehlen mir gerade Zeit und Muße, der Sache im gegenwärtigen Augenblick weiter nachzugehen.

V. Die Visierpunkte als (λ, μ, ν)-Spannpunkte des Dreiecks.

58. Wir gehen nun dazu über, eine weitere wichtige Eigenschaft der Visierpunkte zu betrachten. Wir beschreiben wieder die drei ähnlichen Dreiecke mit dem Seitenverhältnis $l:m:n$, oder den Winkeln λ, μ, ν über den Seiten des Dreiecks ABC (Fig. 35) und ziehen die Spitzenvektoren AL, BM, CN, die sich im (λ, μ, ν)-Visierpunkt V schneiden. Dann ist für Punkt V gegenüber allen anderen Punkten der Ebene des Dreiecks die Summe $l \cdot AP + m \cdot BP + n \cdot CP$, oder die proportionale Summe $\sin\lambda \cdot AP + \sin\mu \cdot BP + \sin\nu \cdot CP$ ein Minimum.

Beweis. Es sei K ein beliebiger Punkt der Ebene des Dreiecks ABC. Wir projizieren ihn auf die Strahlen AV, BV, CV; sind X, Y, Z die Fußpunkte, so ist jedenfalls:

$$(1) \quad \begin{aligned} \sin\lambda \cdot AK + \sin\mu \cdot BK + \sin\nu \cdot CK > \sin\lambda \cdot AX \\ + \sin\mu \cdot BY + \sin\nu \cdot CZ, \end{aligned}$$

da ja AK, BK, CK einzeln genommen je größer sind als AX, BY, CZ.

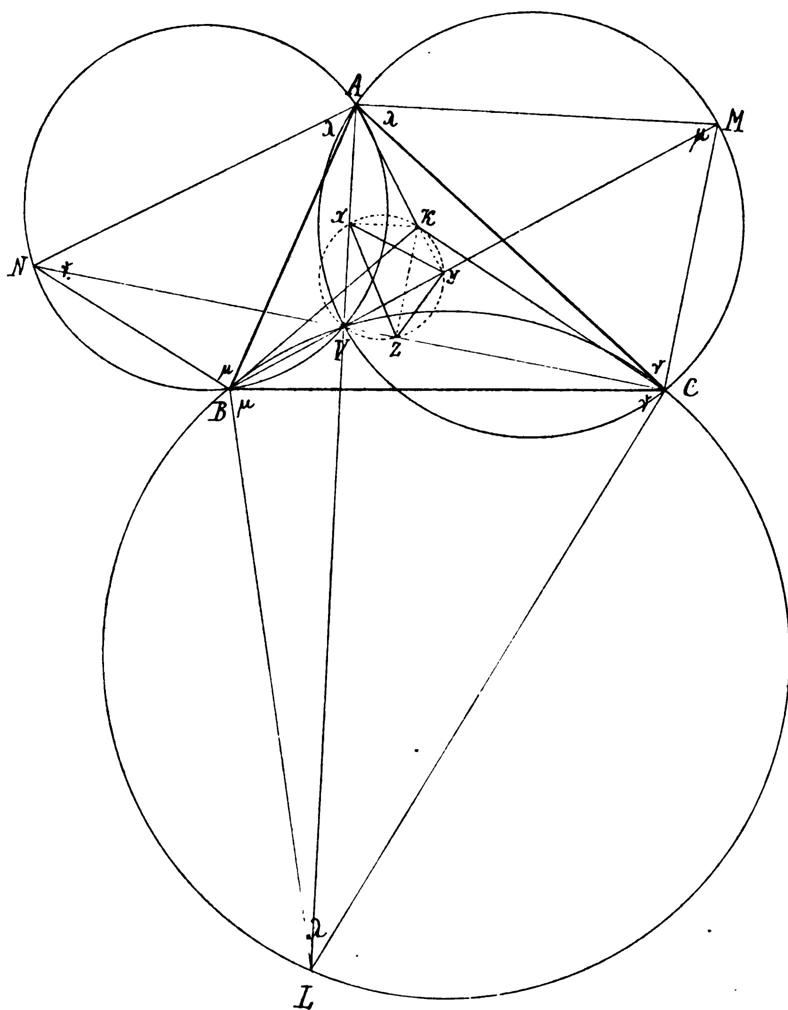


Fig. 35.

Nun ist:

$$\begin{aligned}(2)\quad & \sin\lambda \cdot AX + \sin\mu \cdot BY + \sin\nu \cdot CZ = \sin\lambda\,(AV - VX) \\ & + \sin\mu \cdot (BV + VY) + \sin\nu \cdot (CV - VZ) = (\sin\lambda \cdot AV \\ & + \sin\mu \cdot BV + \sin\nu \cdot CV) - (\sin\lambda \cdot VX - \sin\mu \cdot VY \\ & + \sin\nu \cdot VZ).\end{aligned}$$

Es ist nun aber der Ausdruck in der letzten Klammer gleich Null. Denn das Dreieck XYZ hat offenbar auch die Winkel λ, μ, ν (nämlich $\angle ZXY = ZVY = BLC = \lambda$, u.s.w.); seine Seiten verhalten sich also wie $\sin\lambda : \sin\mu : \sin\nu$, und aus dem Kreisviereck $VXYZ$ folgt nun nach dem Satz des Ptolemaios:

$$\sin\lambda \cdot VX + \sin\nu \cdot VZ = \sin\mu \cdot VY.$$

Es vereinfacht sich also Gleichung (2) zu:

$$(3) \qquad \begin{aligned} \sin\lambda \cdot AX + \sin\mu \cdot BY + \sin\nu \cdot CZ = \sin\lambda \cdot AV \\ + \sin\mu \cdot BV + \sin\nu \cdot CV. \end{aligned}$$

Halten wir nun Gleichung (1) und (3) zusammen, so ergibt sich in der Tat, daß:

$$\sin\lambda \cdot AK + \sin\mu \cdot BK + \sin\nu \cdot CK > \sin\lambda \cdot AV + \sin\mu \cdot BV + \sin\nu \cdot CV.$$

Wir können so den Punkt V auch den (λ, μ, ν)-Minimaldistanzpunkt, oder den Punkt der kleinsten (λ, μ, ν)-Spannweite, oder kurz den (λ, μ, ν)-Spannpunkt des Dreiecks ABC nennen.

Ein wohlbekannter Spezialfall hiervon tritt ein, wenn wir $\lambda = \mu = \nu = \frac{2}{3} R$ setzen. Die ähnlichen Dreiecke werden dann alle gleichseitig; V wird zum Äquivisierpunkt des Dreiecks ABC, und für V wird die Summe $AV + BV + CV$ ein Minimum. Allerdings muß gleich bemerkt werden, daß dieser Satz vom Minimum nicht ganz allgemein gilt. Ist z. B. in dem genannten Spezialfall ein Winkel BAC des Dreiecks $> \frac{4}{3} R$, so schneiden sich die Linien AL, BM, CN außerhalb des Dreiecks. Nimmt man nun zwischen A und diesem Schnittpunkt V einen beliebigen Punkt V' auf AV, so lehrt der Augenschein, daß hier:

$$AV' + BV' + CV' < AV + BV + CV,$$

daß also letzterer Ausdruck hier kein Minimum ist; dieses tritt vielmehr für den Punkt A selbst ein. Immerhin können wir die Summe $AV + BV + CV$ auch in diesem Fall noch als die normale „Spannweite“ des Dreiecks betrachten.

59. Wir können nun die (λ, μ, ν)-Spannweite, also den Ausdruck

$$\sin\lambda \cdot AV + \sin\mu \cdot BV + \sin\nu \cdot CV$$

noch auf eine einfachere Form bringen. In dem Kreisviereck $BVCL$ haben wir nach dem Satz des Ptolemaios die Relation:

$$LC \cdot BV + BL \cdot CV = BC \cdot LV,$$

oder, da:

$$LC : LB : BC = \sin\mu : \sin\nu : \sin\lambda,$$

$$\sin\mu \cdot BV + \sin\nu \cdot CV = \sin\lambda \cdot LV.$$

Setzen wir dies in die Formel für die (λ, μ, ν)-Spannweite ein, so bekommen wir:

$$\sin\lambda \cdot AV + \sin\mu \cdot BV + \sin\nu \cdot CV = \sin\lambda \cdot AV + \sin\lambda \cdot LV$$
$$= \sin\lambda \cdot AL.$$

Somit stoßen wir hier wieder auf den Ausdruck $\sin\lambda \cdot AL$, der uns schon in § 32 entgegentrat; wir sahen dort, daß:

$$\sin\lambda \cdot AL = \sin\mu \cdot BM = \sin\nu \cdot CN.$$

So ergibt sich also, daß diese drei gleichen Ausdrücke die (λ, μ, ν)-Minimaldistanz oder Spannung des Dreiecks ausdrücken, die wir fortan mit Σ_d oder kurz mit d bezeichnen. Wir wissen dieselbe nach § 33 auch einfach geometrisch zu veranschaulichen; nämlich die drei gleichen Linien DE, FG, HK in Fig. 16 $(= AL \cdot \sin\lambda = BM \cdot \sin\mu = CN \cdot \sin\nu)$ sind offenbar gleich der „Spannweite" d des Dreiecks.

60. Ganz Ähnliches gilt nun auch für den zweiten Visierpunkt V'. Es seien nämlich in Fig. 36 die ähnlichen Dreiecke nach innen zu konstruiert, V' sei der Schnitt von AL, BM, CN. Ist nun K ein beliebiger anderer Punkt der Ebene des Dreiecks, so können wir abermals von K die Senkrechten auf AL, BM, CN fällen; dann ist auch hier das Fußpunktsdreieck XYZ ähnlich dem Dreieck BCL mit den Winkeln λ, μ, ν (denn $\angle YXZ = YV'C = BV'C = BLC = \lambda$ u. s. w.). Die Seiten des Dreiecks verhalten sich also wie $\sin\lambda : \sin\mu : \sin\nu$,

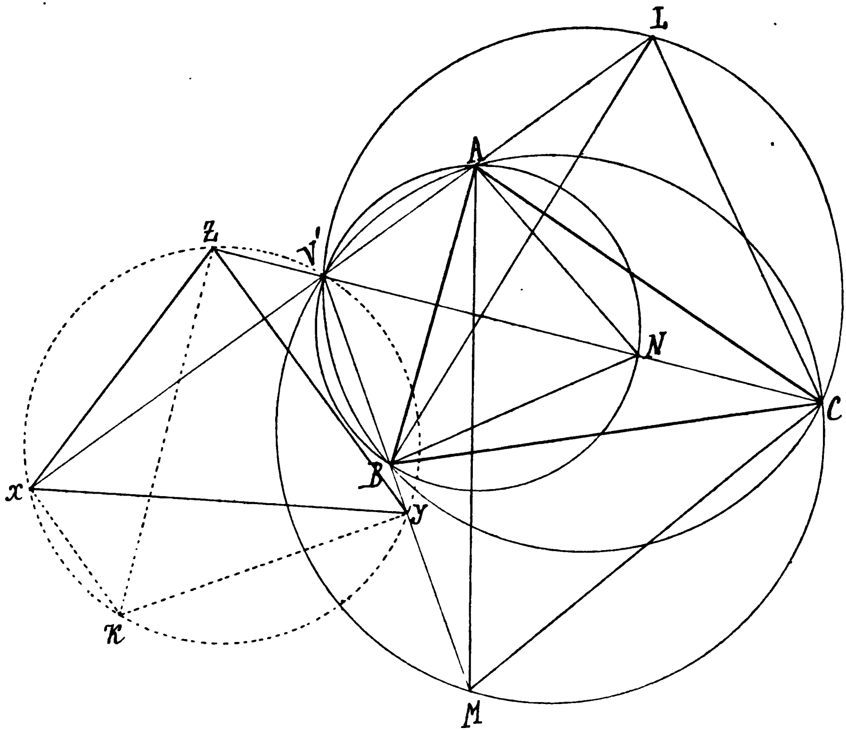


Fig. 36.

und aus dem Kreisviereck $XYV'Z$ erhalten wir so durch Anwendung des Satzes von Ptolemaios die Gleichung:

$$(1) \qquad \sin\mu \cdot V'Y + \sin\nu \cdot V'Z - \sin\lambda \cdot V'X = 0;$$

also:

$$\sin\nu \cdot CZ - \sin\lambda \cdot AX + \sin\mu \cdot BY = \sin\nu \cdot (CV' + V'Z) - \sin\lambda \cdot (AV' + V'X) + \sin\mu \cdot (V'Y - BV') = (\sin\nu \cdot CV' - \sin\lambda \cdot AV' - \sin\mu \cdot BV') + (\sin\nu \cdot V'Z + \sin\mu \cdot V'Y - \sin\lambda \cdot V'X).$$

Da nun der Ausdruck in der letzten Klammer nach Gleichung (1) gleich Null ist, so gilt also hier:

$$(2) \qquad \sin\nu \cdot CV' - \sin\lambda \cdot AV' - \sin\mu \cdot BV' = \sin\nu \cdot CZ - \sin\lambda \cdot AX + \sin\mu \cdot BY.$$

Weiter ergibt sich aus dem Kreisviereck $V'BCL$ nach dem Satz des Ptolemaios (da $BC : CL : BL = \sin\lambda : \sin\mu : \sin\nu$):

$$\sin\nu \cdot CV' = \sin\lambda \cdot LV' + \sin\mu \cdot BV'$$

oder:

$$\sin\nu \cdot CV' - \sin\mu \cdot BV' = \sin\lambda \cdot LV';$$

also wird der Ausdruck in Gleichung (2):

$$\sin\nu \cdot CV' - \sin\lambda \cdot AV' - \sin\mu \cdot BV' = \sin\lambda \cdot LV' - \sin\lambda \cdot AV' = \sin\lambda \cdot AL.$$

Wir haben also ein geometrisches Bild dieser Differenz in Fig. 19, wo $DE = FG = HK = \sin\lambda \cdot AL = \sin\mu \cdot BM = \sin\nu \cdot CN$ (§ 40).

Diesen Ausdruck nennen wir die zweite (innere) Spannweite des Dreiecks und bezeichnen ihn mit Σ_δ oder kurz mit δ.

61. Man soll die beiden (λ, μ, ν)-Spannweiten des Dreiecks, d und δ, aus ihren Koeffizienten λ, μ, ν und aus den Elementen des Dreiecks berechnen.

Lösung. Es sei über der Seite BC des Dreiecks ABC (Fig. 37) nach außen das Dreieck BCL, nach innen das Dreieck BCL', beide mit den Winkeln λ, μ, ν konstruiert. Die beiden Spannweiten, um deren Berechnung es sich handelt, sind dann $\sin\lambda \cdot AL = \Sigma_d$, und $\sin\lambda \cdot AL' = \Sigma_\delta$. Man ziehe nun LL' (welches auf BC senkrecht steht), AL, AL', AD nach der Mitte von LL', endlich $AR \perp LL'$ und $AE \perp BC$.

Dann ist:

$$LB = L'B = \frac{a \cdot \sin\nu}{\sin\lambda}, \quad LC = L'C = \frac{a \cdot \sin\mu}{\sin\lambda};$$

$$LD = L'D = LC \cdot \sin\nu = \frac{a \cdot \sin\mu \cdot \sin\nu}{\sin\lambda};$$

$$\frac{BD}{CD} = \frac{BD : L'D}{CD : L'D} = \operatorname{ctg}\mu : \operatorname{ctg}\nu; \quad \text{endlich } RD = AE = \frac{2J}{a}.$$

Nun ist:

$$AL^2 - AL'^2 = LR^2 - L'R^2 = (LR + L'R) \cdot (LR - L'R);$$

aber:

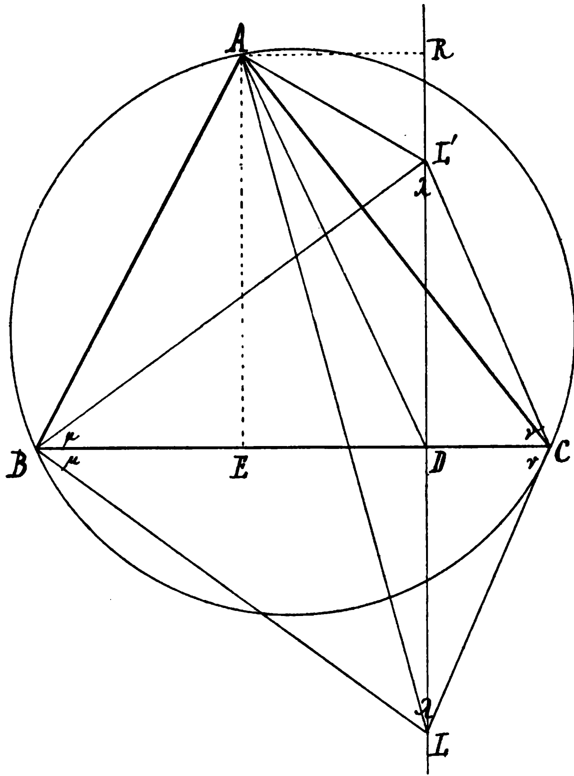


Fig. 37.

$$LR - L'R = LL' = 2\,LD;$$

und:

$$LR + L'R = (LL' + L'R) + L'R = 2\,L'D + 2\,L'R$$
$$= 2\,RD = 2\,AE.$$

Dies substituiert, gibt:

(1)
$$AL^2 - AL'^2 = 2\,LD \cdot 2\,AE = \frac{2\,a \cdot \sin\mu \cdot \sin\nu}{\sin\lambda} \cdot \frac{4\,J}{a}$$
$$= \frac{8\,J \cdot \sin\mu \cdot \sin\nu}{\sin\lambda}.$$

Um nun auch zu einem Ausdruck für $AL^2 + AL'^2$ zu

gelangen, berechne man zuerst AD. Da die Basis des Dreiecks ABC in D nach dem Verhältnis $BD : CD = \operatorname{ctg}\mu : \operatorname{ctg}\nu$ geteilt ist, so gilt:

$$\operatorname{ctg}\mu \cdot b^2 + \operatorname{ctg}\nu \cdot c^2 = (\operatorname{ctg}\mu + \operatorname{ctg}\nu) \cdot AD^2 + \frac{\operatorname{ctg}\mu \cdot \operatorname{ctg}\nu}{\operatorname{ctg}\mu + \operatorname{ctg}\nu} \cdot a^2,$$

folglich:

$$AD^2 = \frac{\operatorname{ctg}\mu \cdot b^2 + \operatorname{ctg}\nu \cdot c^2}{\operatorname{ctg}\mu + \operatorname{ctg}\nu} - \frac{\operatorname{ctg}\mu \cdot \operatorname{ctg}\nu}{(\operatorname{ctg}\mu + \operatorname{ctg}\nu)^2} \cdot a^2.$$

Endlich ergibt sich aus dem Dreieck ALL':

$$(2) \quad \begin{aligned} \tfrac{1}{2}(AL^2 + AL'^2) = AD^2 + L'D^2 = \frac{\operatorname{ctg}\mu \cdot b^2 + \operatorname{ctg}\nu \cdot c^2}{\operatorname{ctg}\mu + \operatorname{ctg}\nu} \\ - \frac{\operatorname{ctg}\mu \cdot \operatorname{ctg}\nu}{(\operatorname{ctg}\mu + \operatorname{ctg}\nu)^2} \cdot a^2 + \frac{\sin^2\mu \cdot \sin^2\nu}{\sin^2\lambda} \cdot a^2. \end{aligned}$$

Da nun:

$$\operatorname{ctg}\mu + \operatorname{ctg}\nu = \frac{\cos\mu}{\sin\mu} + \frac{\cos\nu}{\sin\nu} = \frac{\sin\mu \cdot \cos\nu + \cos\mu \cdot \sin\nu}{\sin\mu \cdot \sin\nu}$$
$$= \frac{\sin(\mu + \nu)}{\sin\mu \cdot \sin\nu} = \frac{\sin\lambda}{\sin\mu \cdot \sin\nu},$$

so wird das erste Glied in Gleichung (2) zu:

$$\frac{\sin\mu \cdot \sin\nu}{\sin\lambda} \cdot (b^2 \cdot \operatorname{ctg}\mu + c^2 \cdot \operatorname{ctg}\nu);$$

der Koeffizient von a^2 aber wird zu:

$$-\frac{\sin^2\mu \cdot \sin^2\nu}{\sin^2\lambda} \cdot \frac{\cos\mu}{\sin\mu} \cdot \frac{\cos\nu}{\sin\nu} + \frac{\sin^2\mu \cdot \sin^2\nu}{\sin^2\lambda}$$
$$= \frac{\sin^2\mu \cdot \sin^2\nu}{\sin^2\lambda}\left(1 - \frac{\cos\mu \cdot \cos\nu}{\sin\mu \cdot \sin\nu}\right) = -\frac{\sin\mu \cdot \sin\nu}{\sin^2\lambda} \cdot \cos(\mu + \nu)$$
$$= \frac{\sin\mu \cdot \sin\nu}{\sin\lambda} \cdot \frac{\cos\lambda}{\sin\lambda} = \frac{\sin\mu \cdot \sin\nu}{\sin\lambda} \cdot \operatorname{ctg}\lambda.$$

Also verwandelt sich schließlich Gleichung (2) in:

$$(3) \quad \tfrac{1}{2}(AL^2 + AL'^2) = \frac{\sin\mu \cdot \sin\nu}{\sin\lambda}(a^2 \cdot \operatorname{ctg}\lambda + b^2 \cdot \operatorname{ctg}\mu + c^2 \cdot \operatorname{ctg}\nu).$$

Nehmen wir hierzu nun Gleichung (1):

$$\tfrac{1}{2}(AL^2 - AL'^2) = \frac{4J \cdot \sin\mu \cdot \sin\nu}{\sin\lambda},$$

so erhalten wir durch Addition:

$$AL^2 = \frac{\sin\lambda \cdot \sin\mu \cdot \sin\nu}{\sin^2\lambda} \cdot (a^2 \cdot \operatorname{ctg}\lambda + b^2 \cdot \operatorname{ctg}\mu + c^2 \cdot \operatorname{ctg}\nu + 4J),$$

und durch Subtraktion:

$$AL'^2 = \frac{\sin\lambda \cdot \sin\mu \cdot \sin\nu}{\sin^2\lambda}(a^2 \cdot \operatorname{ctg}\lambda + b^2 \cdot \operatorname{ctg}\mu + c^2 \cdot \operatorname{ctg}\nu - 4J);$$

also:

$$(4)\quad AL = \frac{1}{\sin\lambda} \cdot \sqrt{\sin\lambda \cdot \sin\mu \cdot \sin\nu (a^2 \cdot \operatorname{ctg}\lambda + b^2 \cdot \operatorname{ctg}\mu + c^2 \cdot \operatorname{ctg}\nu + 4J)},$$

$$AL' = \frac{1}{\sin\lambda} \cdot \sqrt{\sin\lambda \cdot \sin\mu \cdot \sin\nu (a^2 \cdot \operatorname{ctg}\lambda + b^2 \cdot \operatorname{ctg}\mu + c^2 \cdot \operatorname{ctg}\nu - 4J)}.$$

Die Spannweiten

$$\Sigma_d = d = \sin\lambda \cdot AL \quad \text{und} \quad \Sigma_\delta = \delta = \sin\lambda \cdot AL'$$

werden also:

$$d = \sqrt{\sin\lambda \cdot \sin\mu \cdot \sin\nu \cdot (a^2 \cdot \operatorname{ctg}\lambda + b^2 \cdot \operatorname{ctg}\mu + c^2 \cdot \operatorname{ctg}\nu + 4J)};$$

$$\delta = \sqrt{\sin\lambda \cdot \sin\mu \cdot \sin\nu \cdot (a^2 \cdot \operatorname{ctg}\lambda + b^2 \cdot \operatorname{ctg}\mu + c^2 \cdot \operatorname{ctg}\nu - 4J)}.$$

62. Andere Herleitung des Ausdrucks für die Spannweite.

Wir suchen diesmal AL direkt aus dem Dreieck ACL (Fig. 38) zu bestimmen. In diesem ist:

$$AL^2 = b^2 + CL^2 - 2b \cdot CL \cdot \cos(\gamma + \nu);$$

aber:

$$CL = \frac{a \cdot \sin\mu}{\sin\lambda};$$

folglich:

$$AL^2 = b^2 + \frac{a^2 \cdot \sin^2\mu}{\sin^2\lambda} - 2ab \cdot \frac{\sin\mu}{\sin\lambda} \cdot \cos(\gamma + \nu)$$

$$= \frac{b^2 \cdot \sin^2\lambda + a^2 \cdot \sin^2\mu - 2ab \cdot \sin\lambda \cdot \sin\mu \cdot (\cos\gamma \cdot \cos\nu - \sin\gamma \cdot \sin\nu)}{\sin^2\lambda}.$$

Fig. 38.

Da nun $2ab \cdot \cos\gamma = a^2 + b^2 - c^2$, und $2ab \cdot \sin\gamma = 4J$, so erhält man durch Substitution:

$$AL^2 = \frac{a^2 \cdot \sin^2\mu + b^2 \cdot \sin^2\lambda - (a^2+b^2-c^2) \cdot \sin\lambda \cdot \sin\mu \cdot \cos\nu + 4J \cdot \sin\lambda \cdot \sin\mu \cdot \sin\nu}{\sin^2\lambda},$$

folglich ist die Spannweite $\sin\lambda \cdot AL$

$$= \sqrt{\sin\lambda \cdot \sin\mu \cdot \sin\nu \left\{ \frac{a^2 \cdot \sin\mu}{\sin\lambda \cdot \sin\nu} + \frac{b^2 \cdot \sin\lambda}{\sin\mu \cdot \sin\nu} - \frac{(a^2+b^2-c^2) \cdot \cos\nu}{\sin\nu} + 4J \right\}}.$$

Hier ist der Koeffizient von c^2 innerhalb der Klammer offenbar $\operatorname{ctg}\nu$; derjenige von a^2 ist:

$$\frac{\sin\mu}{\sin\lambda \cdot \sin\nu} - \frac{\cos\nu}{\sin\nu} = \frac{\sin(\lambda+\nu)}{\sin\lambda \cdot \sin\nu} - \frac{\cos\nu}{\sin\nu}$$

$$= \frac{\sin\lambda \cdot \cos\nu + \cos\lambda \cdot \sin\nu}{\sin\lambda \cdot \sin\nu} - \frac{\sin\lambda}{\sin\lambda} \cdot \frac{\cos\nu}{\sin\nu} = \frac{\cos\lambda \cdot \sin\nu}{\sin\lambda \cdot \sin\nu} = \operatorname{ctg}\lambda;$$

ebenso ist der parallel gebaute Koeffizient von b^2 gleich $\operatorname{ctg}\mu$; folglich ist:

$$d = \sqrt{\sin\lambda \cdot \sin\mu \cdot \sin\nu \{a^2 \cdot \operatorname{ctg}\lambda + b^2 \cdot \operatorname{ctg}\mu + c^2 \operatorname{ctg}\nu + 4J\}}.$$

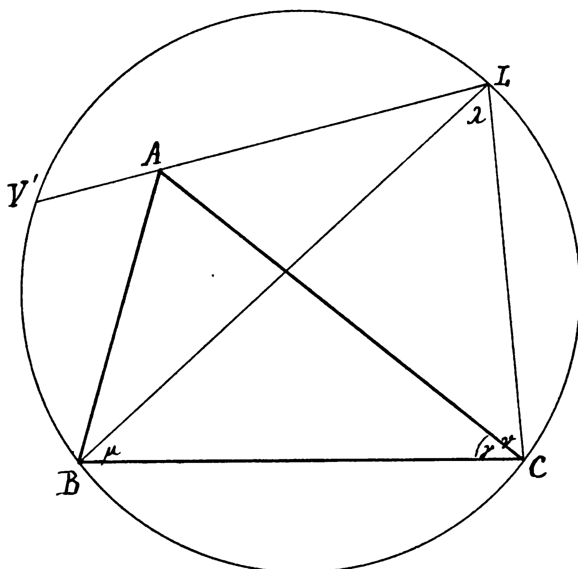


Fig. 39.

Läge V etwa wie in Fig. 39, so bliebe alles gleich, nur wäre statt $\cos(\gamma + \nu)$ vielmehr

$$\cos(\nu - \gamma) = \cos\nu \cdot \cos\gamma + \sin\nu \cdot \sin\gamma$$

in die Rechnung einzustellen, wodurch einzig und allein das Glied mit $4J$ im Zeichen geändert würde. Man bekäme also hier:

$$\delta = \sqrt{\sin\lambda \cdot \sin\mu \cdot \sin\nu \cdot \{a^2 \cdot \operatorname{ctg}\lambda + b^2 \cdot \operatorname{ctg}\mu + c^2 \cdot \operatorname{ctg}\nu - 4J\}}.$$

Während die Spannweite doppeldeutig $= d$ oder δ ist, wenn ihre Koeffizienten λ, μ, ν gegeben sind, so ist sie natürlich eindeutig bestimmt $= D$, wenn der Spannpunkt V festliegt. Die Lage des Punktes V selbst ist dafür maßgebend, ob d oder δ für ihn in Betracht kommt, nämlich ob wir im Drei-

eck ACL (Fig. 38 und 39) die Summe oder die Differenz der Winkel γ und ν bekommen (oder auch ob in Fig. 37 AL oder die kürzere Linie von A nach dem Spiegelpunkte L' von L der Träger des Punktes V ist).

63. Es erhebt sich nun die Frage, für welche Lage des Spannpunktes (welche Koordinaten λ, μ, ν) die Spannweite d ein Maximum wird.

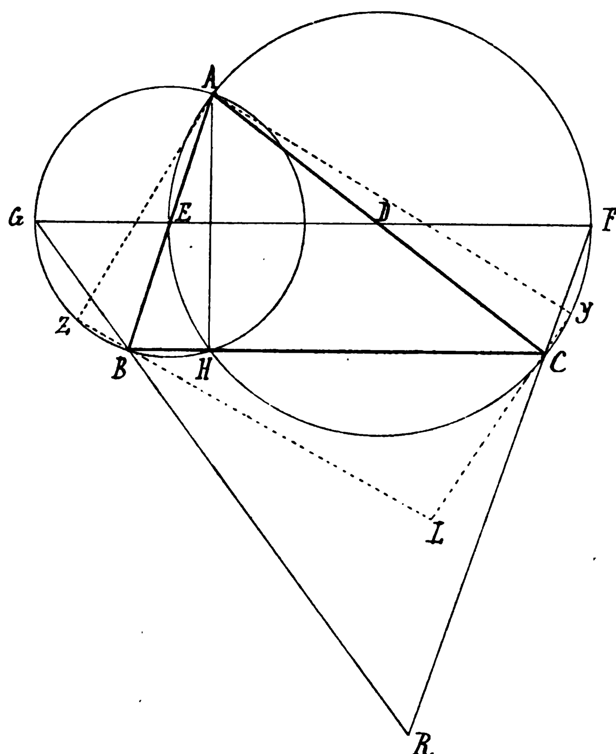


Fig. 40.

Nehmen wir Dreieck BLC mit den Winkeln λ, μ, ν zunächst beliebig (Fig. 40). Die Spannweite von V ist dann $\sin\lambda \cdot AL$ und wird (vgl. Fig. 16) konstruiert, indem man von A auf BL und CL Senkrechte AZ und AY fällt; YZ ist dann

die erste (größere) (λ, μ, ν)-Spannweite des Dreiecks. Läßt man L (und damit die Winkel λ, μ, ν) variieren, so bleiben doch die Punkte Y und Z immer auf den zwei Kreisen über AB und AC als Durchmessern; YZ wird also ein Maximum, wenn Y und Z in die Endpunkte F und G der Zentrale der zwei Kreise um D und E fallen.

Zieht man nun CF und BG, die sich in R schneiden mögen, so ist:

$$\angle BGE = R - \frac{GEB}{2} = R - \frac{\beta}{2} \text{(da ja } FG \parallel BC\text{)};$$

ebenso:

$$\angle CFD = R - \frac{CDF}{2} = R - \frac{\gamma}{2},$$

also:

$$\angle FRG = R - \frac{\alpha}{2}.$$

Beschreibt man also den Kreis BCR, so wird dieser auf der anderen Seite von BC den Winkel $R + \frac{\alpha}{2}$ fassen, er wird also durch das Zentrum des Inkreises gehen. Da die nämlichen Überlegungen für die zwei übrigen Dreiecksseiten gelten, so ist also der gesuchte Punkt mit einem Maximum der Spannweite der Mittelpunkt des Inkreises.

64. Augenfälligere Vorstellung von der Größe der Spannweite einzelner Punkte gewinnt man durch folgenden wichtigen Lehrsatz: Die Spannweite eines Punktes V ist gleich dem Quotienten aus dem Inhalt des Grunddreiecks ABC und dem Umkreisradius des Fußpunktsdreiecks von V:

$$D = \frac{J}{r_f}.$$

Beweis. V sei ein beliebiger Punkt in der Ebene des Dreiecks ABC (Fig. 41); konstruiert man Kreis BVC und bringt ihn in L zum Schnitt mit AV, so ist $AL \cdot \sin BLC$ die Spannweite von V. Konstruiere nun weiter den Gegenbrennpunkt J zu V, so ist dessen Fußpunktsdreieck $X'Y'Z' \sim BLC$,

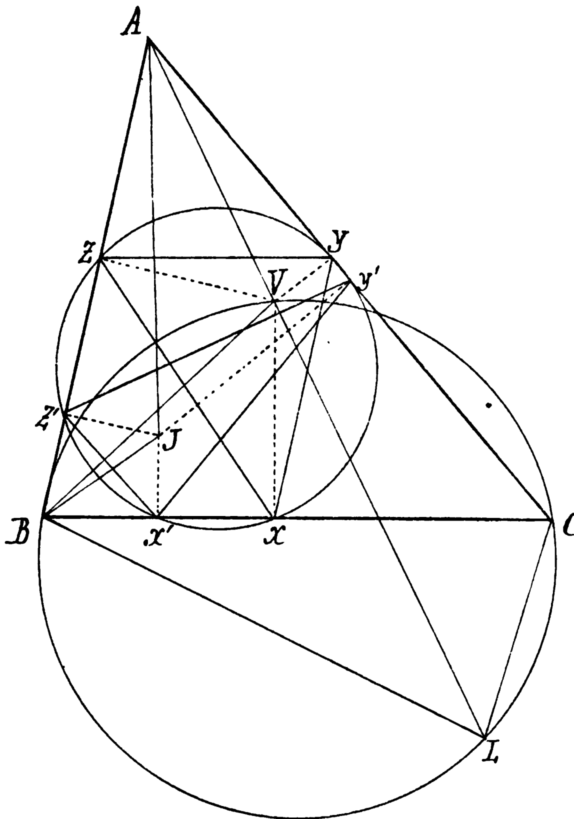


Fig. 41.

$\angle Y'X'Z' = BLC = \lambda$; der Umkreisradius r_{1f} des Dreiecks $X'Y'Z'$ aber ist gleich dem des Fußpunktsdreiecks XYZ von $V = r_f$ (da V und J Gegenpunkte, liegen ja bekanntlich die sechs Fußpunkte X, Y, Z, X', Y', Z' auf einem Kreis).

Aus Dreieck $X'Y'Z'$ folgt nun:

$$r_{1f} = r_f = \frac{1}{2} \cdot \frac{Y'Z'}{\sin Y'X'Z'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AJ \cdot \sin \alpha}{\sin \lambda} = \frac{1}{2} \frac{AJ \cdot AL \cdot \sin \alpha}{AL \cdot \sin \lambda}.$$

Nun ist aber $\triangle AJB \sim ACL$ (denn $\angle BAJ = CAL$ und $ABJ = CBV = CLV$); also:

$$\frac{AJ}{c} = \frac{b}{AL},$$

oder:

$$AJ \cdot AL = bc;$$

folglich:

$$r_f = \frac{1}{2} \cdot \frac{bc \cdot \sin \alpha}{AL \cdot \sin \lambda} = \frac{J}{D}.$$

Umgekehrt also:

$$D = \frac{J}{r_f}.$$

Dies gilt für jede Lage des Punktes V in der Ebene des Dreiecks.

65. Sind P_1 und P_2 ein Paar Gegenpunkte, so sind für die beiden die Radien der Fußpunktsdreiecke gleich; folglich auch $D_1 = \frac{J}{r_{1f}} = \frac{J}{r_{2f}} = D_2$. Mit anderen Worten: Gegenpunkte haben gleiche Spannweite D.

66. Spezialisierungen. Für das Umkreiszentrum O ist $r_f = \frac{1}{2} r$, also die Spannweite $D = \frac{2J}{r} = \frac{abc}{2r^2}$; der Vektor AL $= \frac{2J}{r \cdot \sin 2\alpha} = \frac{2J}{a \cdot \cos \alpha} = \frac{h}{\cos \alpha}$.

Für H, den Gegenpunkt von O, hat man natürlich auch $r_f = \frac{1}{2} r$, $D = \frac{2J}{r}$; der Vektor AL ist hier $= \frac{2J}{r \cdot \sin \alpha} = 2h$.

67. Für das Zentrum des Inkreises M ist:

$$D = \frac{J}{\varrho}; \text{ aber } J = \frac{\varrho\,(a+b+c)}{2};$$

folglich:

$$D = \tfrac{1}{2}(a+b+c).$$

Dies ist also (nach § 63) das Maximum aller möglichen Spannweiten.

Für den Mittelpunkt M' des Ankreises ist $D = \frac{J}{\varrho_a}$; aber $J = \frac{\varrho_a (b+c-a)}{2}$; folglich $D = \frac{b+c-a}{2}$.

Ähnlich für die Mittelpunkte der anderen Ankreise.

68. Für den Lemoineschen Punkt ist nach „Grundlagen“, § 139:

$$r_f = \tfrac{4}{3} \cdot \frac{t\,t'\,t''}{a^2 + b^2 + c^2};$$

also ist für Schwerpunkt und Lemoineschen Punkt:

$$D = \tfrac{3}{4} \cdot \frac{J\,(a^2 + b^2 + c^2)}{t\,t'\,t''}.$$

69. Für den Pol der Seite BC und seinen Gegenpunkt (vgl. oben § 42) ist nach „Grundlagen“, § 181:

$$r_f = \frac{b\,c\,t}{b^2 + c^2 - a^2};$$

also für beide Punkte:

$$D = \frac{(b^2 + c^2 - a^2) \cdot \sin a}{2\,t}.$$

70. Für die Brocardschen Punkte ist:

$$r_f = \frac{J}{\sqrt{h^2 + h'^2 + h''^2}},$$

also:

$$D = \sqrt{h^2 + h'^2 + h''^2}.$$

71. Liegt V auf dem Umkreis des Dreiecks, so ist XYZ eine gerade Linie, r_f also unendlich; deswegen ist für den Umkreis:

$$D = \frac{J}{r_f} = \frac{J}{\infty} = 0.$$

In der Tat wird hier der Vektor $AL = 0$, da L mit A zusammenfällt.

Bewegt sich V auf der Geraden BC, so ist der Durchmesser des Fußpunktsdreiecks von V gleich AV; also ist:

$$D = \frac{J}{r_f} = \frac{2\,J}{A\,V}.$$

Dieser Ausdruck wird ein Maximum für $AV = h$, also den Fußpunkt der ersten Höhe, nämlich:

$$D = \frac{2J}{h} = a.$$

Frägt man nach dem geometrischen Ort aller Punkte von gleicher gegebener Spannweite im Fußpunktsdreieck, so fällt dies mit der Frage nach dem geometrischen Ort aller Punkte zusammen, für die r_f, der Radius des Fußpunktsdreiecks, konstant ist. Diese Aufgabe hoffe ich späterhin in einem besonderen Aufsatz „Trifolium Hiberniae“ zu behandeln.

VI. Metrische Relationen an den Visierpunkten und Isomorphopolen.

72. Man soll die Abstände der Ecken von den (λ, μ, ν)-Visierpunkten berechnen.

Wir ziehen in Fig. 42 den Kreis BVC, der AV in L und AB in E schneiden möge. Dann ist:

$$AV \cdot AL = AB \cdot AE.$$

Dabei ist $\angle BEC = BLC = \lambda$; also $BCE = \beta - \lambda$ und $ACE = \gamma + \beta - \lambda = 2R - (a + \lambda)$; folglich ergibt sich aus Dreieck ACE die Proportion:

$$AE = \frac{b \cdot \sin(\lambda + a)}{\sin \lambda};$$

aber:

$$\frac{\sin(\lambda + a)}{\sin \lambda} = \frac{\sin \lambda \cdot \cos a + \cos \lambda \cdot \sin a}{\sin \lambda} = \cos a + \sin a \cdot \operatorname{ctg} \lambda$$

$$= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{2J}{bc} \cdot \operatorname{ctg} \lambda = \frac{b^2 + c^2 - a^2 + 4J \cdot \operatorname{ctg} \lambda}{2bc};$$

folglich:

$$AE = \frac{b^2 + c^2 - a^2 + 4J \cdot \operatorname{ctg} \lambda}{2c};$$

also:

$$AB \cdot AE = AV \cdot AL = \tfrac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) + 2J \cdot \operatorname{ctg} \lambda.$$

Setzt man die Formel für den Vektor AL aus § 61 ein, so erhält man:

$$AV = \frac{\frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) \cdot \sin\lambda + 2J \cdot \cos\lambda}{\sqrt{\sin\lambda \cdot \sin\mu \cdot \sin\nu \cdot \{a^2 \cdot \operatorname{ctg}\lambda + b^2 \cdot \operatorname{ctg}\mu + c^2 \cdot \operatorname{ctg}\nu + 4J\}}}.$$

Der Faktor im Zähler kann auch geschrieben werden: $2J \cdot \sin\lambda\,(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\lambda)$. Zyklische Vertauschung im Zähler gibt natürlich die Formeln für BV und CV.

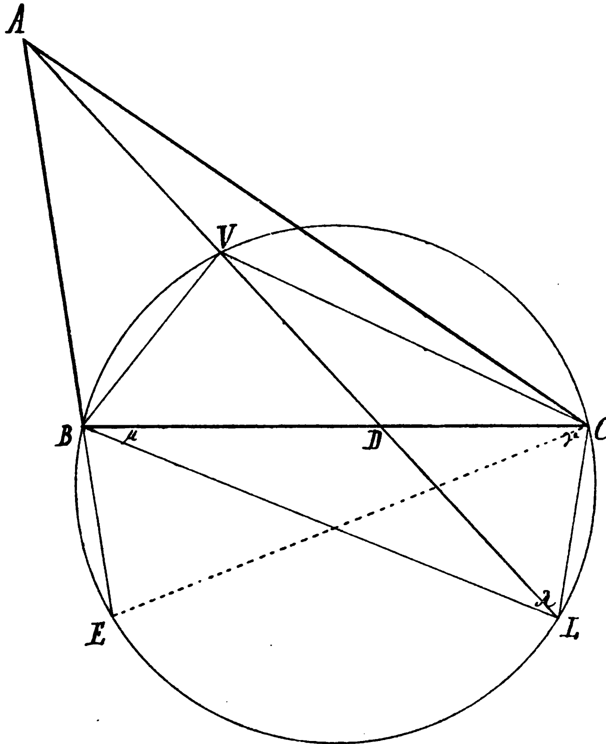


Fig. 42.

73. Schneidet der Kreis VBC die Gerade AB auf der anderen Seite von A (Fig. 43), so ist: $\angle BEC = \lambda$, $BCE = 2R - (\beta + \lambda)$; $ACE = \alpha - \lambda$; also $AE = \frac{b \cdot \sin(\alpha - \lambda)}{\sin\lambda}$, was nach ähnlicher Reduktion wie in § 72 schließlich mit Zeichenwechsel von $(b^2 + c^2 - a^2)$ ergibt:

$$AE = \frac{-(b^2 + c^2 - a^2) + 4J \cdot \operatorname{ctg} \lambda}{2c}.$$

Auch hier ist wieder:

$$AV' \cdot AL' = AB \cdot AE = -\tfrac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) + 2J \cdot \operatorname{ctg} \lambda;$$

also:

$$AV' = \frac{-\tfrac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) \cdot \sin \lambda + 2J \cdot \cos \lambda}{\sqrt{\sin \lambda \cdot \sin \mu \cdot \sin \nu \cdot \{a^2 \cdot \operatorname{ctg} \lambda + b^2 \cdot \operatorname{ctg} \mu + c^2 \cdot \operatorname{ctg} \nu - 4J\}}}.$$

Man sieht, daß die Formeln in § 72 und 73 eine Lösung des Pothenotschen Problems in geschlossener Form bieten. Denn man kann in Fig. 42 etwa AB und AC als fest gegeben ansehen, desgleichen die Winkel AVC und AVB als gegeben. Wie dann die Distanzen AV, BV, CV rechnerisch gefunden werden können, lehren eben die Formeln der letzten Paragraphen.

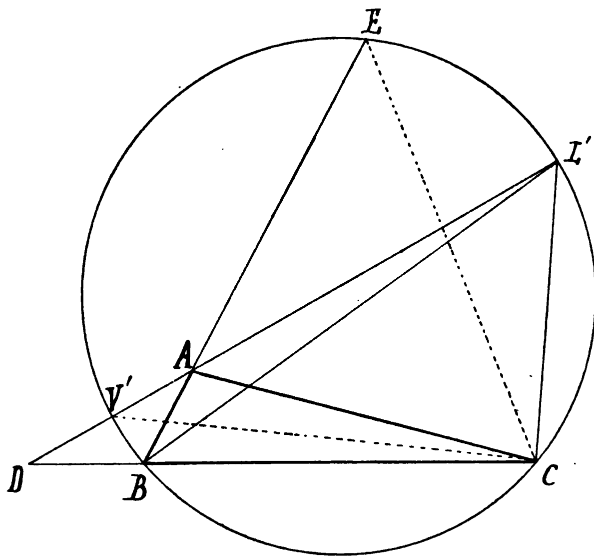


Fig. 43.

74. Man soll die baryzentrischen Koeffizienten der (λ, μ, ν)-Visierpunkte bestimmen.

Lösung. In Fig. 42 hat man:

$$BD : DV = \sin\nu : \sin VBD,$$

und:

$$CD : DV = \sin\mu : \sin VCB;$$

folglich:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{\sin\nu}{\sin\mu} \cdot \frac{\sin VCB}{\sin VBD},$$

oder:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{\sin\nu}{\sin\mu} \cdot \frac{BV}{CV}.$$

Setzt man die Werte von BV und CV, wie sie sich aus § 72 ergeben, ein, so folgt:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{\sin\nu}{\sin\mu} \cdot \frac{\frac{1}{2}(a^2 - b^2 + c^2)\cdot\sin\mu + 2J\cdot\cos\mu}{\frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2)\cdot\sin\nu + 2J\cdot\cos\nu},$$

oder:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{a^2 - b^2 + c^2 + 4J\cdot\operatorname{ctg}\mu}{a^2 + b^2 - c^2 + 4J\cdot\operatorname{ctg}\nu}.$$

Demnach ist V das Baryzentrum zu dem System:

$$A_{\frac{1}{-a^2+b^2+c^2+4J\cdot\operatorname{ctg}\lambda}},\quad B_{\frac{1}{a^2-b^2+c^2+4J\cdot\operatorname{ctg}\mu}},$$
$$C_{\frac{1}{a^2+b^2-c^2+4J\cdot\operatorname{ctg}\nu}}.$$

Für Fig. 43 gilt dieselbe Beweisführung; nur tritt ein Zeichenwechsel ein und die Koeffizienten werden:

$$A_{\frac{1}{-a^2+b^2+c^2-4J\cdot\operatorname{ctg}\lambda}},\quad B_{\frac{1}{a^2-b^2+c^2-4J\cdot\operatorname{ctg}\mu}},$$
$$C_{\frac{1}{a^2+b^2-c^2-4J\cdot\operatorname{ctg}\nu}}.$$

Da der Ausdruck $(b^2 + c^2 - a^2 + 4J\cdot\operatorname{ctg}\lambda)$, wie eine kurze Rechnung zeigt, $= 4J\cdot(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\lambda)$, so lassen sich die beiden Systeme auch schreiben:

$$A_{\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\lambda}},\quad B_{\frac{1}{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\mu}},\quad C_{\frac{1}{\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\nu}},$$

respektive:

$$A_{\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\lambda}},\quad B_{\frac{1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\mu}},\quad C_{\frac{1}{\operatorname{ctg}\gamma-\operatorname{ctg}\nu}}.$$

75. Wir betrachten nun die Gegenpunkte von V und V', also die Isomorphopole J und J', deren Fußpunktsdreiecke die Winkel λ, μ, ν haben. Hat nun ein Punkt P die baryzentrischen Koeffizienten l, m, n, so hat nach Barytomik, § 7 sein Gegenpunkt die Koeffizienten:

$$\frac{a^2}{l},\ \frac{b^2}{m},\ \frac{c^2}{n};$$

folglich sind die Koeffizienten von J:

$$A_{a^2(-a^2+b^2+c^2+4J\cdot\operatorname{ctg}\lambda)},\quad B_{b^2(a^2-b^2+c^2+4J\cdot\operatorname{ctg}\mu)},$$
$$C_{c^2(a^2+b^2-c^2+4J\cdot\operatorname{ctg}\nu)}.$$

Diejenigen von J' zeigen einen Zeichenwechsel; der von A ist:

$$a^2\cdot(-a^2+b^2+c^2-4J\cdot\operatorname{ctg}\lambda);$$

ähnlich die anderen.

76. Erstes Beispiel. Es sei $\lambda=\alpha$, $\mu=\beta$, $\nu=\gamma$; also ist der Isomorphopol in diesem Fall das Umkreiszentrum. Da nun

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{b^2+c^2-a^2}{4J}$$

ist, so wird der erste Koeffizient

$$=a^2(-a^2+b^2+c^2+b^2+c^2-a^2)=2a^2(b^2+c^2-a^2).$$

Dies stimmt auch für das Umkreiszentrum O, das als ersten Koeffizienten

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{4J}{bc}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2J}{a^2b^2c^2}\cdot a^2(b^2+c^2-a^2)$$

hat. Beim Vergleich mit $\sin 2\beta$ und $\sin 2\gamma$ hebt sich der erste Faktor $\frac{2J}{a^2b^2c^2}$, und es bleibt als Koeffizient für A tatsächlich $a^2(b^2+c^2-a^2)$.

77. Zweites Beispiel. Wir nehmen den ersten Nebenschwerpol (den Pol der Seite BC), vgl. oben § 42. Die Winkel seines Fußpunktsdreiecks sind $X = 2R - a$, $Y = (ct)$, $Z = (bt)$. Für Q haben wir die zweiten Formeln anzuwenden; der Koeffizient l von A wird also $= a^2(-a^2 + b^2 + c^2 - 4J \cdot \operatorname{ctg} \lambda)$. Da nun $\operatorname{ctg} \lambda = \operatorname{ctg}(2R - a) = -\operatorname{ctg} a$ ist, so bekommt man:

$$l = a^2(-a^2 + b^2 + c^2 + 4J \cdot \operatorname{ctg} a) = 2a^2(b^2 + c^2 - a^2),$$

genau wie in § 76.

Der Koeffizient m von B ist $b^2(a^2 - b^2 + c^2 - 4J \cdot \operatorname{ctg}(ct))$; allein:

$$\operatorname{ctg}(ct) = \frac{\cos(ct)}{\sin(ct)} = \frac{c^2 + t^2 - \frac{1}{4}a^2}{2ct} : \frac{J}{ct} = \frac{c^2 + t^2 - \frac{1}{4}a^2}{2J};$$

dies eingesetzt gibt: $m = -2b^2(b^2 + c^2 - a^2)$; also verhält sich: $l : m = -a^2 : b^2$. Tatsächlich sind die Koeffizienten von Q: $-a^2$, b^2, c^2.

78. Wir suchen nun den Abstand des Isomorphopols J von einer Ecke zu ermitteln. Wir haben schon in § 64 gesehen, daß (Fig. 41):

$$AJ = \frac{bc}{AL}.$$

Den Wert von AL können wir aus § 61 einsetzen, und erhalten so:

$$AJ = \frac{bc \cdot \sin \lambda}{\sqrt{\sin \lambda \cdot \sin \mu \cdot \sin \nu (a^2 \cdot \operatorname{ctg} \lambda + b^2 \cdot \operatorname{ctg} \mu + c^2 \cdot \operatorname{ctg} \nu + 4J)}},$$

oder kürzer:

$$AJ = \frac{bc \cdot \sin \lambda}{d}.$$

Man könnte auch schreiben:

$$AJ = \frac{2J \cdot \sin \lambda}{d \cdot \sin a},$$

oder da:

$$\frac{J}{d} = r_f, \quad AJ = \frac{2r_f \cdot \sin \lambda}{\sin a}.$$

Ähnlich ist:

$$BJ = \frac{ac \cdot \sin\mu}{d}, \qquad CJ = \frac{ab \cdot \sin\nu}{d};$$

$$AJ : BJ : CJ = \frac{\sin\lambda}{\sin\alpha} : \frac{\sin\mu}{\sin\beta} : \frac{\sin\nu}{\sin\gamma}.$$

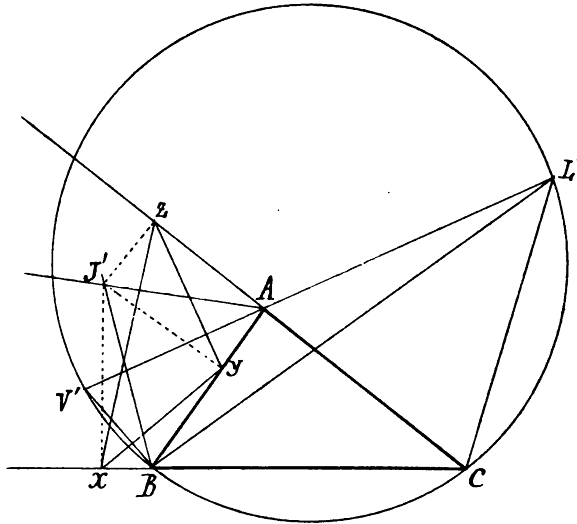


Fig. 44.

79. Für J' ergeben sich analoge Resultate. Auch hier ist (Fig. 44): $\triangle J'AC \sim ABL'$; denn $\angle J'AC = \alpha + J'AB = \alpha + V'AZ$ (da J' und V' Gegenpunkte sind) $= \alpha + CAL' = BAL'$, und $\angle ACJ' = BCV' = V'L'B = AL'B$; also auch hier:

$$AJ' : b = c : AL' \quad \text{und} \quad AJ' = \frac{bc}{AL'} = \frac{bc \cdot \sin\lambda}{\delta},$$

oder:

$$AJ' = \frac{bc \cdot \sin\lambda}{\sqrt{\sin\lambda \cdot \sin\mu \cdot \sin\nu \cdot (a^2 \cdot \operatorname{ctg}\lambda + b^2 \cdot \operatorname{ctg}\mu + c^2 \cdot \operatorname{ctg}\nu - 4J)}}.$$

Natürlich ist:

$$BJ' = \frac{ac \cdot \sin\mu}{\delta}, \qquad CJ' = \frac{ab \cdot \sin\nu}{\delta};$$

$$AJ' : BJ' : CJ' = \frac{\sin\lambda}{\sin\alpha} : \frac{\sin\mu}{\sin\beta} : \frac{\sin\nu}{\sin\gamma} = AJ : BJ : CJ;$$

die Punkte A, B, C liegen ja auf einem apollonischen Kreis über JJ'; endlich:

$$\frac{AJ}{AJ'} = \frac{BJ}{BJ'} = \frac{CJ}{CJ'} = \frac{\delta}{d}.$$

80. Die erste Seite des Fußpunktsdreiecks von J ist demnach:

$$YZ = AJ \cdot \sin\alpha = \frac{bc \cdot \sin\lambda \cdot \sin\alpha}{d} = \frac{2J \cdot \sin\lambda}{d},$$

oder voll geschrieben:

$$YZ = \frac{2J \cdot \sin\lambda}{\sqrt{\sin\lambda \cdot \sin\mu \cdot \sin\nu \cdot (a^2 \cdot \operatorname{ctg}\lambda + b^2 \cdot \operatorname{ctg}\mu + c^2 \cdot \operatorname{ctg}\nu + 4J)}}.$$

Die Seite $Y_1 Z_1$ des Fußpunktsdreiecks von J_1 ist entsprechend:

$$Y_1 Z_1 = AJ_1 \cdot \sin\alpha = \frac{bc \cdot \sin\lambda \cdot \sin\alpha}{\delta} = \frac{2J \cdot \sin\lambda}{\delta}.$$

Es verhält sich also:

$$\frac{YZ}{Y_1 Z_1} = \frac{\delta}{d}.$$

81. Der Inhalt des Fußpunktsdreiecks von J ist:

$$\Delta_f = \tfrac{1}{2}\, XY \cdot XZ \cdot \sin\lambda = \tfrac{1}{2} \sin\lambda \cdot \frac{2J \cdot \sin\nu}{d} \cdot \frac{2J \cdot \sin\mu}{d}$$

$$= \frac{2J^2 \cdot \sin\lambda \cdot \sin\mu \cdot \sin\nu}{d^2} = \frac{2J^2}{a^2 \cdot \operatorname{ctg}\lambda + b^2 \cdot \operatorname{ctg}\mu + c^2 \cdot \operatorname{ctg}\nu + 4J}.$$

Natürlich gilt für das Fußpunktsdreieck von J':

$$\Delta_f' = \frac{2J^2 \cdot \sin\lambda \cdot \sin\mu \,.\, \sin\nu}{\delta^2};$$

auch ist:

$$\frac{\Delta_f}{\Delta_f'} = \frac{\delta^2}{d^2}.$$

82. Um OJ und OJ' zu berechnen, beachte man, daß in Fig. 3 (oben) $\triangle\, AOJ \sim AOJ'$ ist; denn $\angle\, AOJ = AOJ'$,

Ähnlich ist:

$$BJ = \frac{ac \cdot \sin\mu}{d}, \qquad CJ = \frac{ab \cdot \sin\nu}{d};$$

$$AJ : BJ : CJ = \frac{\sin\lambda}{\sin\alpha} : \frac{\sin\mu}{\sin\beta} : \frac{\sin\nu}{\sin\gamma}.$$

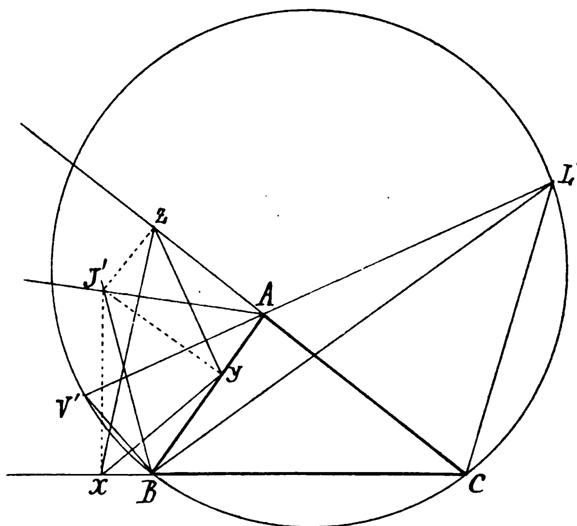


Fig. 44.

79. Für J' ergeben sich analoge Resultate. Auch hier ist (Fig. 44): $\triangle J'AC \sim ABL'$; denn $\angle J'AC = \alpha + J'AB = \alpha + V'AZ$ (da J' und V' Gegenpunkte sind) $= \alpha + CAL' = BAL'$, und $\angle ACJ' = BCV' = V'L'B = AL'B$; also auch hier:

$$AJ' : b = c : AL' \quad \text{und} \quad AJ' = \frac{bc}{AL'} = \frac{bc \cdot \sin\lambda}{\delta},$$

oder:

$$AJ' = \frac{bc \cdot \sin\lambda}{\sqrt{\sin\lambda \cdot \sin\mu \cdot \sin\nu \cdot (a^2 \cdot \operatorname{ctg}\lambda + b^2 \cdot \operatorname{ctg}\mu + c^2 \cdot \operatorname{ctg}\nu - 4J)}}.$$

Natürlich ist:

$$BJ' = \frac{ac \cdot \sin\mu}{\delta}, \qquad CJ' = \frac{ab \cdot \sin\nu}{\delta};$$

$$AJ' : BJ' : CJ' = \frac{\sin\lambda}{\sin\alpha} : \frac{\sin\mu}{\sin\beta} : \frac{\sin\nu}{\sin\gamma} = AJ : BJ : CJ;$$

die Punkte A, B, C liegen ja auf einem apollonischen Kreis über JJ'; endlich:

$$\frac{AJ}{AJ'} = \frac{BJ}{BJ'} = \frac{CJ}{CJ'} = \frac{\delta}{d}.$$

80. Die erste Seite des Fußpunktsdreiecks von J ist demnach:

$$YZ = AJ \cdot \sin\alpha = \frac{bc \cdot \sin\lambda \cdot \sin\alpha}{d} = \frac{2J \cdot \sin\lambda}{d},$$

oder voll geschrieben:

$$YZ = \frac{2J \cdot \sin\lambda}{\sqrt{\sin\lambda \cdot \sin\mu \cdot \sin\nu \cdot (a^2 \cdot \operatorname{ctg}\lambda + b^2 \cdot \operatorname{ctg}\mu + c^2 \cdot \operatorname{ctg}\nu + 4J)}}.$$

Die Seite $Y_1 Z_1$ des Fußpunktsdreiecks von J_1 ist entsprechend:

$$Y_1 Z_1 = AJ_1 \cdot \sin\alpha = \frac{bc \cdot \sin\lambda \cdot \sin\alpha}{\delta} = \frac{2J \cdot \sin\lambda}{\delta}.$$

Es verhält sich also:

$$\frac{YZ}{Y_1 Z_1} = \frac{\delta}{d}.$$

81. Der Inhalt des Fußpunktsdreiecks von J ist:

$$\Delta_f = \tfrac{1}{2} XY \cdot XZ \cdot \sin\lambda = \tfrac{1}{2} \sin\lambda \cdot \frac{2J \cdot \sin\nu}{d} \cdot \frac{2J \cdot \sin\mu}{d}$$

$$= \frac{2J^2 \cdot \sin\lambda \cdot \sin\mu \cdot \sin\nu}{d^2} = \frac{2J^2}{a^2 \cdot \operatorname{ctg}\lambda + b^2 \cdot \operatorname{ctg}\mu + c^2 \cdot \operatorname{ctg}\nu + 4J}.$$

Natürlich gilt für das Fußpunktsdreieck von J':

$$\Delta_f' = \frac{2J^2 \cdot \sin\lambda \cdot \sin\mu \,.\, \sin\nu}{\delta^2};$$

auch ist:

$$\frac{\Delta_f}{\Delta_f'} = \frac{\delta^2}{d^2}.$$

82. Um OJ und OJ' zu berechnen, beachte man, daß in Fig. 3 (oben) $\triangle\, AOJ \sim AOJ'$ ist; denn $\angle\, AOJ = AOJ'$,

und da $OJ \cdot OJ' = r^2 = AO^2$, so ist $OJ : AO = AO : OJ'$; aus der Ähnlichkeit der Dreiecke folgt dann auch $OJ : AJ = AO : AJ'$, oder $OJ : r = AJ : AJ' = \delta : d$, also $OJ = r \cdot \frac{\delta}{d}$; ferner $AJ : AO = AJ' : OJ'$, oder $AJ : AJ' = r : OJ'$, $OJ' = r \frac{d}{\delta}$; also $OJ : OJ' = \delta^2 : d^2$, während natürlich $OJ \cdot OJ' = r^2$ ist.

Vollgeschrieben lauten die Formeln:

$$OJ = r \cdot \frac{\sqrt{a^2 \cdot \operatorname{ctg} \lambda + b^2 \cdot \operatorname{ctg} \mu + c^2 \cdot \operatorname{ctg} \nu - 4J}}{\sqrt{a^2 \cdot \operatorname{ctg} \lambda + b^2 \cdot \operatorname{ctg} \mu + c^2 \cdot \operatorname{ctg} \nu + 4J}};$$

$$OJ' = r \cdot \frac{\sqrt{a^2 \cdot \operatorname{ctg} \lambda + b^2 \cdot \operatorname{ctg} \mu + c^2 \cdot \operatorname{ctg} \nu + 4J}}{\sqrt{a^2 \cdot \operatorname{ctg} \lambda + b^2 \cdot \operatorname{ctg} \mu + c^2 \cdot \operatorname{ctg} \nu - 4J}}.$$

83. Die Potenz von J in Bezug auf den Umkreis ist sonach:

$$\Pi = r^2 - OJ^2 = r^2 - r^2 \cdot \frac{\delta^2}{d^2} = \frac{r^2 (d^2 - \delta^2)}{d^2};$$

die Potenz von J' ist:

$$\Pi' = OJ'^2 - r^2 = r^2 \cdot \frac{d^2}{\delta^2} - r^2 = \frac{r^2 (d^2 - \delta^2)}{\delta^2}.$$

Daraus folgt alsbald:

$$\Pi : \Pi_1 = \delta^2 : d^2.$$

Der Inhalt des Fußpunktsdreiecks von J ist nun nach „Grundlagen“, § 89:

$$J_f = \frac{1}{4} \cdot \frac{\Pi}{r^2} \cdot J,$$

also

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{d^2 - \delta^2}{d^2} \cdot J.$$

Offenbar ist nun $d^2 - \delta^2 = 8\,J \cdot \sin \lambda \cdot \sin \mu \cdot \sin \nu$; also:

$$J_f = \tfrac{1}{4}\, J \cdot \frac{\sin \lambda \cdot \sin \mu \cdot \sin \nu \cdot 8\,J}{d^2}.$$

Dies ist natürlich die gleiche Formel wie in § 81. Man

hätte umgekehrt auch den Abstand OJ aus der Formel für den Inhalt des Fußpunktsdreiecks von J in § 81 herleiten können.

84. Natürlich ergibt sich ohne weiteres:

$$JJ' = OJ' - OJ = r \cdot \frac{d}{\delta} - r \cdot \frac{\delta}{d} = r \cdot \frac{d^2 - \delta^2}{d \cdot \delta}.$$

Die Ausrechnung ergäbe:

$$JJ' = r \cdot \frac{8\,J}{\sqrt{(a^2 \cdot \operatorname{ctg} \lambda + b^2 \cdot \operatorname{ctg} \mu + c^2 \operatorname{ctg} \nu)^2 - 16\,J^2}}.$$

85. Man soll die Abstände des Punktes J von den Seiten des Dreiecks berechnen.

In dem Dreieck BJC (Fig. 3) ist $2\varrho \cdot JX = BJ \cdot CJ$, wenn ϱ den Radius des Umkreises von BJC bezeichnet. Dabei ist weiter $2\varrho \cdot \sin BJC = a$, also:

$$2\,\varrho = \frac{a}{\sin BJC} = \frac{a}{\sin(\lambda + \alpha)},$$

und folglich:

$$JX = \frac{BJ \cdot CJ \cdot \sin(\lambda + \alpha)}{a}.$$

Allein nach § 78 ist:

$$BJ = \frac{ac \cdot \sin \mu}{d}, \qquad CJ = \frac{ab \cdot \sin \nu}{d};$$

also:

(1) $$JX = \frac{abc \cdot \sin \mu \cdot \sin \nu \cdot \sin(\lambda + \alpha)}{d^2}.$$

Ähnlich ist:

$$JY = \frac{abc \cdot \sin \lambda \cdot \sin \nu \cdot \sin(\mu + \beta)}{d^2},$$

und:

$$JZ = \frac{abc \cdot \sin \lambda \cdot \sin \mu \cdot \sin(\nu + \gamma)}{d^2};$$

also offenbar:

$$JX : JY : JZ = \frac{\sin(\lambda + \alpha)}{\sin \lambda} : \frac{\sin(\mu + \beta)}{\sin \mu} : \frac{\sin(\nu + \gamma)}{\sin \nu}.$$

Man kann $\sin(\lambda + \alpha)$ auch ausrechnen, und bekommt dann:

$$\sin(\lambda + \alpha) = \sin\lambda \cdot \cos\alpha + \cos\lambda \cdot \sin\alpha$$

$$= \sin\lambda \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \cos\lambda \cdot \frac{2J}{bc} = \frac{(b^2 + c^2 - a^2 + 4J \cdot \operatorname{ctg}\lambda) \cdot \sin\lambda}{2bc};$$

also:

$$JX = \tfrac{1}{2}\,\frac{a \cdot (-a^2 + b^2 + c^2 + 4J \cdot \operatorname{ctg}\lambda)}{a^2 \cdot \operatorname{ctg}\lambda + b^2 \cdot \operatorname{ctg}\mu + c^2 \cdot \operatorname{ctg}\nu + 4J}.$$

Man sieht, daß:

$$JX : JY : JZ = a \cdot (-a^2 + b^2 + c^2 + 4J \cdot \operatorname{ctg}\lambda) : b \cdot (a^2 - b^2 + c^2 + 4J \cdot \operatorname{ctg}\mu) : c \cdot (a^2 + b^2 - c^2 + 4J \cdot \operatorname{ctg}\nu).$$

Dies sind also die trimetrischen Koordinaten von J. Man hätte diese auch schnell aus § 75 finden können, indem man die dort gegebenen baryzentrischen Koordinaten durch a, b, c geteilt hätte.

Durch Anwendung der Formeln am Schluß von § 74 erhält man endlich:

$$JX : JY : JZ$$
$$= a \cdot (\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\lambda) : b \cdot (\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\mu) : c \cdot (\operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\nu).$$

Für den Punkt J' würde man in ähnlicher Weise erhalten:

$$J'X = \frac{abc \cdot \sin\mu \cdot \sin\nu \cdot \sin(\alpha - \lambda)}{\delta^2} \quad (\text{da } \angle BJ'C = \alpha - \lambda),$$

also:

$$J'X : J'Y : J'Z = \frac{\sin(\alpha - \lambda)}{\sin\lambda} : \frac{\sin(\beta - \mu)}{\sin\mu} : \frac{\sin(\nu - \gamma)}{\sin\nu};$$

oder auch ausgerechnet:

$$J'X = \tfrac{1}{2}\,a \cdot \frac{4J \cdot \operatorname{ctg}\lambda - (b^2 + c^2 - a^2)}{a^2 \cdot \operatorname{ctg}\lambda + b^2 \cdot \operatorname{ctg}\mu + c^2 \cdot \operatorname{ctg}\nu - 4J}.$$

Die trimetrischen Koordinaten von J' sind dann in einfachstem Ausdruck:

$$a \cdot (\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\lambda),\ b \cdot (\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\mu),\ c \cdot (\operatorname{ctg}\gamma - \operatorname{ctg}\nu).$$

VII. Die (λ, μ, ν)-Kardinalachse des Dreiecks und ihr Pol.

86. Wir wollen nun den vierten harmonischen Punkt zu O, J, J' und seine Polare einer Betrachtung unterziehen. Nennen wir die Winkel des Fußpunktsdreiecks von J wiederum λ, μ, ν, so ist (Fig. 3):

$$\frac{XZ}{XY} = \frac{BJ \cdot \sin\beta}{CJ \cdot \sin\gamma} = \frac{\sin\mu}{\sin\nu};$$

also:

$$\frac{BJ}{CJ} = \frac{\sin\mu}{\sin\nu} \cdot \frac{c}{b},$$

also auch:

$$\frac{BK}{CK} = \frac{\sin\mu}{\sin\nu} \cdot \frac{c}{b}.$$

Da die Summe von BK und CK gleich der Grundlinie a ist, so erhält man:

$$BK = a \cdot \frac{c \cdot \sin\mu}{b \cdot \sin\nu + c \cdot \sin\mu},$$

$$CK = a \cdot \frac{b \cdot \sin\nu}{b \cdot \sin\nu + c \cdot \sin\mu}.$$

Ähnlich ergibt sich:

$$BK' = a \cdot \frac{c \cdot \sin\mu}{b \cdot \sin\nu - c \cdot \sin\mu},$$

$$CK' = a \cdot \frac{b \cdot \sin\nu}{b \cdot \sin\nu - c \cdot \sin\mu}.$$

Also ist:

$$KK' = BK + BK' = \frac{2abc \cdot \sin\mu \cdot \sin\nu}{b^2 \cdot \sin^2\nu - c^2 \cdot \sin^2\mu},$$

und $DK = DJ$ ist die Hälfte hiervon.

Weiter findet man:

$$BD = DK - BK = \frac{ac^2 \cdot \sin^2\mu}{b^2 \sin^2\nu - c^2 \cdot \sin^2\mu},$$

$$CD = DK + CK = \frac{ab^2 \cdot \sin^2\nu}{b^2 \cdot \sin^2\nu - c^2 \cdot \sin^2\mu};$$

also:

$$BD \cdot CD = \frac{a^2 b^2 c^2 \cdot \sin^2 \mu \cdot \sin^2 \nu}{(b^2 \cdot \sin^2 \nu - c^2 \cdot \sin^2 \mu)^2} = DK^2.$$

$DK = DJ = DL$ ist also die Länge der von D an den Umkreis gezogenen Tangente (der Kreis um D ist ja ein Orthogonalkreis an den Umkreis, da B, C, K, K' harmonische Punkte sind).

Ähnlich ist:

$$EJ = EM = EJ' = \frac{abc \cdot \sin \lambda \cdot \sin \nu}{a^2 \cdot \sin^2 \nu - c^2 \cdot \sin^2 \lambda},$$

und:

$$FJ = FJ' = \frac{abc \cdot \sin \lambda \cdot \sin \mu}{a^2 \cdot \sin^2 \mu - b^2 \cdot \sin^2 \lambda}.$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$A = b^2 \sin^2 \nu - c^2 \cdot \sin^2 \mu,$$
$$B = a^2 \sin^2 \nu - c^2 \cdot \sin^2 \lambda,$$
$$C = a^2 \sin^2 \mu - b^2 \cdot \sin^2 \lambda,$$

so gilt danach für das Verhältnis von $DJ : EJ : FJ$ die Gleichung:

$$DJ : EJ : FJ = \frac{1}{\sin \lambda \cdot A} : \frac{1}{\sin \mu \cdot B} : \frac{1}{\sin \nu \cdot C}.$$

87. Das Verhältnis von $BD : CD$ erhält man aus § 86:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{c^2 \cdot \sin^2 \mu}{b^2 \cdot \sin^2 \nu};$$

ähnlich ist:

$$\frac{AE}{CE} = \frac{c^2 \cdot \sin^2 \lambda}{a^2 \cdot \sin^2 \nu},$$

da nämlich:

$$AE = \frac{bc^2 \sin^2 \lambda}{a^2 \sin^2 \nu - c^2 \sin^2 \lambda}, \qquad CE = \frac{a^2 b \sin^2 \nu}{a^2 \sin^2 \nu - c^2 \sin^2 \lambda};$$

ebenso:

$$\frac{AF}{BF} = \frac{b^2 \cdot \sin^2 \lambda}{a^2 \cdot \sin^2 \mu}.$$

Dabei ist:

$$\frac{CD}{BD} \cdot \frac{BF}{AF} \cdot \frac{AE}{CE} = 1,$$

da ja die Punkte D, E, F auf einer Geraden liegen. Diese wollen wir fortan die „(λ, μ, ν)-Kardinalachse“, oder kurz die „(λ, μ, ν)-Achse“ des Dreiecks nennen.

Die Abstände der Ecken A, B, C von der Kardinalachse verhalten sich offenbar wie:

$$\frac{\sin^2 \lambda}{a^2} : \frac{\sin^2 \mu}{b^2} : \frac{\sin^2 \nu}{c^2} = \frac{l^2}{a^2} : \frac{m^2}{b^2} : \frac{n^2}{c^2} = l^2 \cdot h^2 : m^2 \cdot h'^2 : n^2 \cdot h''^2.$$

Denn die Höhen von B und C auf die Kardinalachse verhalten sich wie $BD : CD$, und dieses ist, wie wir eben sahen, gleich:

$$c^2 \cdot \sin^2 \mu : b^2 \cdot \sin^2 \nu = \frac{\sin^2 \mu}{b^2} : \frac{\sin^2 \nu}{c^2}.$$

Die Abstände der Ecken von der Pascalschen Geraden verhalten sich also wie $h^2 : h'^2 : h''^2$.

88. Der Pol der Kardinalachse ist leicht zu bestimmen. Denn die Polare von D ist LL', die Polare von E ist MM'; schneiden sich diese in N, so ist N der Pol von DEF; es wird selbstverständlich auch die Polare von F durch N gehen. Natürlich muß dieser Pol N auf der Senkrechten vom Umkreiszentrum O auf die Polare DEF liegen; dies ist aber, wie wir schon aus § 7 wissen, eben die Gerade OJJ'.

Beschreibt man über JJ' als Durchmesser einen Kreis, so muß dieser den Umkreis rechtwinklig schneiden, da J und J' konjugierte Pole sind (Spieker, § 265, 2). Der Radius desselben ist also die Tangente $GR = GR'$ von G an den Umkreis; die Berührungssehne RR' muß ebenfalls durch N als den Pol von DEF gehen, und wird auf OJJ' senkrecht stehen. Für den Kreis über JJ' als Durchmesser sind also N und O konjugierte Pole ($NR \perp JJ'$, und $GRO = R$, also OR Tangente); es ist also N der vierte harmonische Punkt zu O, J und J'. Demnach bilden RJ, RJ' und RN, RO ein harmonisches Strahlen-

büschel, und da die zwei Strahlen JR und $J'R$ aufeinander senkrecht stehen (da JJ' Durchmesser), so muß RJ den Winkel NRO halbieren. Es ist also $OJ : NJ = OR : NR$.

89. Offenbar ist:

$$OG = \tfrac{1}{2}(OJ + OJ') = \tfrac{1}{2} r \left(\frac{\delta}{d} + \frac{d}{\delta}\right) = \frac{r}{2} \cdot \frac{d^2 + \delta^2}{d \cdot \delta}.$$

Da nun $ON \cdot OG = r^2$, weil N Pol zu $DGEF$, so folgt:

$$ON = \frac{r^2}{OG} = \frac{2 r \cdot d \cdot \delta}{d^2 + \delta^2};$$

also:

$$RN^2 = r^2 - ON^2 = r^2 - \frac{4 r^2 \cdot d^2 \delta^2}{(d^2 + \delta^2)^2}$$

$$= \frac{r^2 (d^2 + \delta^2)^2 - 4 r^2 \cdot d^2 \delta^2}{(d^2 + \delta^2)^2} = \frac{r^2 (d^2 - \delta^2)^2}{(d^2 + \delta^2)^2};$$

also:

$$RN = r \cdot \frac{d^2 - \delta^2}{d^2 + \delta^2}.$$

90. Wir wissen bereits aus § 88, daß RJ den Winkel NRO halbiert, und daß deswegen $OJ : NJ = OR : NR$. Setzt man hier den Wert von NR aus § 89 ein, so folgt:

$$\frac{OJ}{NJ} = \frac{d^2 + \delta^2}{d^2 - \delta^2},$$

oder ausgerechnet:

$$\frac{OJ}{NJ} = \frac{a^2 \cdot \operatorname{ctg} \lambda + b^2 \cdot \operatorname{ctg} \mu + c^2 \cdot \operatorname{ctg} \nu}{4 J}.$$

Da ferner:

$$OJ = r \cdot \frac{\delta}{d},$$

so ist:

$$NJ = r \cdot \frac{\delta}{d} \cdot \frac{d^2 - \delta^2}{d^2 + \delta^2};$$

endlich:

$$JR^2 = NJ \cdot JJ' = r \cdot \frac{\delta}{d} \cdot \frac{d^2 - \delta^2}{d^2 + \delta^2} \cdot r \cdot \frac{d^2 - \delta^2}{d \cdot \delta} = \frac{r^2 \cdot (d^2 - \delta^2)^2}{d^2 \cdot (d^2 + \delta^2)};$$

also:

$$JR = \frac{r \cdot (d^2 - \delta^2)}{d \cdot \sqrt{d^2 + \delta^2}}.$$

91. Man soll die Abschnitte DE, EF, DF der Kardinalachse berechnen.

Lösung. In dem Dreieck CDE kennt man:

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab};$$

$$CD = \frac{ab^2 \cdot \sin^2\nu}{b^2 \cdot \sin^2\nu - c^2 \sin^2\mu} = \frac{ab^2 \cdot \sin^2\nu}{A} \quad (\S\ 86)$$

und:

$$CE = \frac{a^2 b \cdot \sin^2\nu}{a^2 \cdot \sin^2\nu - c^2 \cdot \sin^2\lambda} = \frac{a^2 b \cdot \sin^2\nu}{B} \quad (\S\ 87).$$

Daraus läßt sich DE nach dem Cosinussatz berechnen, nämlich:

$$DE^2 = \frac{a^2 b^4 \cdot \sin^4\nu}{A^2} + \frac{a^4 b^2 \cdot \sin^4\nu}{B^2} - 2\,\frac{a^3 b^3 \cdot \sin^4\nu}{A \cdot B} \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$= a^2 b^2 \cdot \sin^4\nu \left(\frac{b^2}{A^2} + \frac{a^2}{B^2} - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{A \cdot B}\right)$$

$$= \frac{a^2 b^2 \sin^4\nu}{A^2 \cdot B^2} \cdot (a^2 A^2 + b^2 B^2 - A \cdot B(a^2 + b^2 - c^2));$$

also:

$$DE = \frac{ab \sin^2\nu}{A \cdot B} \cdot \sqrt{a^2 A^2 + b^2 \cdot B^2 - A \cdot B(a^2 + b^2 - c^2)}.$$

92. Man kann den Abstand DE auch mittelst der allgemeinen Formel für den Abstand zweier durch ihre baryzentrischen Koeffizienten gegebener Punkte (Barytomik, § 64) bestimmen.

Da nach § 87 das Verhältnis:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{c^2 \cdot \sin^2\mu}{b^2 \cdot \sin^2\nu},$$

so ist D Baryzentrum des Systems:

$$A_0, \quad B_{b^2 \cdot \sin^2\nu}, \quad C_{-c^2 \cdot \sin^2\mu};$$

da ähnlich:

$$\frac{AE}{CE} = \frac{c^2 \cdot \sin^2 \lambda}{a^2 \cdot \sin^2 \nu},$$

so ist E Baryzentrum zu:

$$A_{a^2 \cdot \sin^2 \nu},\ B_0,\ C_{-c^2 \cdot \sin^2 \lambda};$$

man hat also für die Koeffizienten das Schema:

$$\begin{array}{l|l} l = 0 & l' = a^2 \cdot \sin^2 \nu \\ m = b^2 \cdot \sin^2 \nu & m' = 0 \\ n = -c^2 \cdot \sin^2 \mu & n' = -c^2 \cdot \sin^2 \lambda; \end{array}$$

also bekommt man die Formel:

$$DE^2 = \frac{-a^2b^2c^2 \cdot \sin^2\lambda \cdot \sin^2\nu - a^2b^2c^2 \cdot \sin^2\mu \cdot \sin^2\nu + a^2b^2c^2 \sin^4\nu}{(b^2 \cdot \sin^2 \nu - c^2 \cdot \sin^2 \mu)(a^2 \cdot \sin^2 \nu - c^2 \cdot \sin^2 \lambda)}$$
$$- \frac{a^2b^2c^2 \cdot \sin^2 \mu \cdot \sin^2 \nu}{(b^2 \sin^2 \nu - c^2 \cdot \sin^2 \mu)^2} - \frac{a^2b^2c^2 \cdot \sin^2 \lambda \cdot \sin^2 \nu}{(a^2 \cdot \sin^2 \nu - c^2 \cdot \sin^2 \lambda)^2}.$$

Hier sind die zwei letzten Ausdrücke direkt als Potenzen von D und E auf den Umkreis aus § 86 eingesetzt. Die Reduktion ergibt:

$$DE^2 = \frac{a^2b^2c^2 \cdot \sin^2 \nu}{A \cdot B}(\sin^2 \nu - \sin^2 \lambda - \sin^2 \mu)$$
$$- a^2b^2c^2 \cdot \sin^2 \nu \left(\frac{\sin^2 \mu}{A^2} + \frac{\sin^2 \lambda}{B^2}\right)$$
$$= \frac{a^2b^2c^2\sin^2\nu}{A^2 \cdot B^2}\{A \cdot B(\sin^2\nu - \sin^2\lambda - \sin^2\mu) - A^2 \cdot \sin^2\lambda - B^2 \cdot \sin^2\mu\};$$

also:

$$DE = \frac{abc \cdot \sin\nu}{A \cdot B}\sqrt{A \cdot B(\sin^2\nu - \sin^2\lambda - \sin^2\mu) - A^2 \cdot \sin^2\lambda - B^2 \cdot \sin^2\mu}.$$

93. Ist $\lambda = \mu = \nu = 60^0$, so werden J und J' die Äquilateralpole, N wird der Lemoinesche Punkt und die Kardinalachse wird zur Pascalschen Geraden des Dreiecks. Für sie wird nach der Formel in § 91:

$$DE = \frac{ab \cdot \sin^2 60^0}{(b^2 - c^2) \cdot \sin^2 60^0 \cdot (a^2 - c^2) \cdot \sin^2 60^0}.$$
$$\sqrt{a^2 \cdot (b^2 - c^2)^2 \cdot \sin^4 60^0 + b^2 \cdot (a^2 - c^2)^2 \cdot \sin^4 60^0 - (b^2 - c^2) \cdot (a^2 - c^2)(a^2 + b^2 - c^2) \sin^4 60^0}.$$

Hier heben sich zunächst die Sinusfaktoren und es ist:

$$DE = \frac{a\,b}{(b^2-c^2)\cdot(a^2-c^2)} \cdot \sqrt{\begin{array}{l} a^2(b^4-2b^2c^2+c^4)+b^2(a^4-2a^2c^2+c^4) \\ -(a^2b^2-b^2c^2-a^2c^2+c^4)(a^2+b^2-c^2). \end{array}}$$

Hier heben sich eine Anzahl Glieder unter dem Wurzelzeichen; die übrigen haben den Faktor c^2, den wir vor die Wurzel ziehen; dadurch bekommen wir:

$$DE = \frac{a\,b\,c \cdot \sqrt{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2}}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}.$$

Man kann den Ausdruck auch noch etwas umformen. Bekanntlich ist nämlich:

$$16\,J^2 = 2\,a^2b^2 + 2\,a^2c^2 + 2\,b^2c^2 - (a^4+b^4+c^4);$$

also:

$$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 - 16\,J^2 = a^4+b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2;$$

folglich ist:

$$DE = \frac{a\,b\,c \cdot \sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2-16\,J^2}}{(a^2-c^2)\cdot(b^2-c^2)}.$$

Zum leichteren Vergleich mit den anderen Abschnitten der Achse kann man auch schreiben:

$$DE = \frac{a\,b\,c \cdot (a^2-b^2) \cdot \sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2-16\,J^2}}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)(b^2-c^2)}.$$

Das Verhältnis der drei Abschnitte ist somit offenbar:

$$DE : DF : EF = (a^2-b^2) : (a^2-c^2) : (b^2-c^2).$$

Wie $DE + EF = DF$, so ist in der Tat:

$$(a^2-b^2) + (b^2-c^2) = (a^2-c^2).$$

94. Soll $DE = EF$ sein, soll also die Pascalsche Gerade (Tangentialachse) durch die Seite b in zwei gleiche Abschnitte zerlegt werden, so muß

$$a^2 - b^2 = b^2 - c^2$$

sein, also:

$$b^2 = \tfrac{1}{2}(a^2+c^2).$$

Da $a^2 + c^2 = 2t'^2 + \frac{1}{2}b^2$, so ist in unserem Fall:

$$b^2 = t'^2 + \frac{1}{4}b^2,$$

also:

$$\frac{3}{4}b^2 = t'^2 \quad \text{und} \quad b = \frac{2}{3}t'\sqrt{3}.$$

Danach ist es leicht, Dreiecke mit der genannten Eigenschaft zu konstruieren; es braucht nur $b : t'$ das Verhältnis $2\sqrt{3} : 3$ zu haben.

95. Sollen im Fußpunktsdreieck die Abschnitte der Tangentialachse gegebenes Verhältnis haben, so muß sein:

$$\frac{a_f^2 - c_f^2}{b_f^2 - c_f^2} = C;$$

also:

$$\frac{AP^2 \cdot \sin^2 \alpha - CP^2 \cdot \sin^2 \gamma}{BP^2 \cdot \sin^2 \alpha - CP^2 \cdot \sin^2 \gamma} = C.$$

Soll der Zähler für sich konstant sein, so ist der geometrische Ort ein Kreis um E (da $AE : CE = \sin^2 \gamma : \sin^2 \alpha$), für Konstanz des Nenners ist der Ort ein Kreis um D. Kreise mit dem Zentrum auf der Geraden DE werden also das Verhältnis konstant machen.

Soll speziell $DE_f = EF_f$ sein, so ist $b_f^2 = \frac{1}{2}(a_f^2 + c_f^2)$; es geht also nach Grundlagen, § 149 der Kreis durch die Äquilateralpole (denn für diese ist das Fußpunktsdreieck gleichseitig, also $2b_f = a_f + c_f$); sein Zentrum ist der Durchschnitt von BT' (T' ist der zweite Transversalpol) mit der Tangentialachse. Die Zentren für die zwei anderen, analogen Kreise liefert der Schnitt der Tangentialachse mit AT und CT''.

96 Wir kehren zur allgemeinen Kardinalachse zurück und suchen nun die trimetrischen und baryzentrischen Koordinaten ihres Poles N zu bestimmen. Wir fällen zu diesem Zweck von O, J und N die Senkrechten auf BC (Fig. 45; vgl. auch Fig. 3); $NF = x$ soll bestimmt werden, $OD = f$ und $JE = g$ kennen wir schon; desgleichen das Verhältnis von $OJ : NJ = m : n$.

Fig. 45.

Nun folgt aus dem Trapez *FDON*:

$$mx + nf = g \cdot (m + n),$$

also:

$$x = \frac{g(m+n)}{m} - \frac{nf}{m}.$$

Nun ist $f = r \cdot \cos\alpha$; weiter nach § 85:

$$g = JE = \frac{1}{2} \cdot \frac{a(-a^2 + b^2 + c^2 + 4J \cdot \operatorname{ctg}\lambda) \cdot \sin\lambda \cdot \sin\mu \cdot \sin\nu}{d^2};$$

und nach § 90:

$$\frac{m}{n} = \frac{OJ}{NJ} = \frac{d^2 + \delta^2}{d^2 - \delta^2}, \quad \text{also} \quad \frac{m+n}{m} = \frac{2d^2}{d^2 + \delta^2}.$$

Dies alles eingesetzt, gibt:

$$x = \frac{a(-a^2 + b^2 + c^2 + 4J \cdot \operatorname{ctg}\lambda) \cdot \sin\lambda \cdot \sin\mu \cdot \sin\nu}{d^2 + \delta^2} - \frac{d^2 - \delta^2}{d^2 + \delta^2} \cdot r \cdot \cos\alpha,$$

oder, da:

$$d^2 - \delta^2 = 8J \cdot \sin\lambda \cdot \sin\mu \cdot \sin\nu,$$

und:

$$d^2 + \delta^2 = 2\sin\lambda \cdot \sin\mu \cdot \sin\nu\,(a^2 \cdot \mathrm{ctg}\,\lambda + b^2 \cdot \mathrm{ctg}\,\mu + c^2 \cdot \mathrm{ctg}\,\nu),$$

$$x = \frac{a(-a^2 + b^2 + c^2 + 4J \cdot \mathrm{ctg}\,\lambda) - 8rJ \cdot \cos\alpha}{2(a^2 \cdot \mathrm{ctg}\,\lambda + b^2 \cdot \mathrm{ctg}\,\mu + c^2 \cdot \mathrm{ctg}\,\nu)};$$

nun ist:

$$8rJ = 2abc,$$

und:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

also:

$$8rJ \cdot \cos\alpha = a(b^2 + c^2 - a^2);$$

dies hebt sich im Zähler von x gegen den gleichen Ausdruck, und so bleibt einfach:

$$x = \frac{2aJ \cdot \mathrm{ctg}\,\lambda}{a^2 \cdot \mathrm{ctg}\,\lambda + b^2 \cdot \mathrm{ctg}\,\mu + c^2 \cdot \mathrm{ctg}\,\nu}.$$

Für die Abstände des Punktes N von den zwei anderen Seiten ergeben sich natürlich analoge Formeln.

97. Die trimetrischen Koordinaten von N sind also offenbar $a \cdot \mathrm{ctg}\,\lambda$, $b \cdot \mathrm{ctg}\,\mu$, $c \cdot \mathrm{ctg}\,\nu$, und die baryzentrischen $a^2 \cdot \mathrm{ctg}\,\lambda$, $b^2 \cdot \mathrm{ctg}\,\mu$, $c^2 \cdot \mathrm{ctg}\,\nu$.

Ist $\lambda = \mu = \nu$, so wird N zum Lemoineschen Punkt, dessen Koordinaten a, b, c, respektive a^2, b^2, c^2 sind.

Für Kreise um den Punkt N ist nach dem Satze von Lagrange:

$$AP^2 \cdot a^2 \cdot \mathrm{ctg}\,\lambda + BP^2 \cdot b^2 \cdot \mathrm{ctg}\,\mu + CP^2 \cdot c^2 \cdot \mathrm{ctg}\,\nu = C,$$

also:

$$a_f^2 \cdot \mathrm{ctg}\,\lambda + b_f^2 \cdot \mathrm{ctg}\,\mu + c_f^2 \cdot \mathrm{ctg}\,\nu = C.$$

Dies könnte man auch für die Lösung der Aufgabe in Barytomik, § 13 benützen. Man konstruiert ein Dreieck, in dem sich die Kotangenten der Winkel λ, μ, ν wie $l : m : n$ verhalten; konstruiert dann die Isomorphopole J und J' für λ, μ, ν;

der vierte harmonische Punkt zu O, J und J' ist dann das gesuchte Kreiszentrum.

98. Die Potenz von N in Bezug auf den Umkreis zu finden. Nach Barytomik, § 46 erhält man alsbald:

$$\Pi = \frac{a^2 b^2 c^2 (\operatorname{ctg}\lambda \cdot \operatorname{ctg}\mu + \operatorname{ctg}\lambda \cdot \operatorname{ctg}\nu + \operatorname{ctg}\mu \cdot \operatorname{ctg}\nu)}{(a^2 \cdot \operatorname{ctg}\lambda + b^2 \cdot \operatorname{ctg}\mu + c^2 \cdot \operatorname{ctg}\nu)^2},$$

oder, da bekanntlich (Heis, Trigonometrie[2], Seite 216, Nr. 36):

$$\operatorname{ctg}\lambda \cdot \operatorname{ctg}\mu + \operatorname{ctg}\lambda \cdot \operatorname{ctg}\nu + \operatorname{ctg}\mu \cdot \operatorname{ctg}\nu = 1,$$

$$\Pi = \frac{a^2 b^2 c^2}{(a^2 \cdot \operatorname{ctg}\lambda + b^2 \cdot \operatorname{ctg}\mu + c^2 \cdot \operatorname{ctg}\nu)^2}.$$

Es ist also:

$$NR = \frac{abc}{a^2 \cdot \operatorname{ctg}\lambda + b^2 \cdot \operatorname{ctg}\mu + c^2 \cdot \operatorname{ctg}\nu},$$

und:

$$ON^2 = r^2 - \Pi = r^2 - \frac{a^2 b^2 c^2}{(a^2 \cdot \operatorname{ctg}\lambda + b^2 \cdot \operatorname{ctg}\mu + c^2 \cdot \operatorname{ctg}\nu)^2}.$$

Der Ausdruck, der sich hier für ON ergibt, muß natürlich identisch sein mit dem bereits in § 89 gefundenen:

$$ON = \frac{2r \cdot d \cdot \delta}{d^2 + \delta^2}.$$

VIII. Konstanz der Spannweite im Fusspunktsdreieck.

99. Fundamentalaufgabe. Den geometrischen Ort aller Punkte zu finden, für welche die (λ, μ, ν)-Spannweite d_f (oder δ_f) im Fußpunktsdreieck konstant ist.

In Anwendung der Formeln von § 61 müßte der Ausdruck

$$d_f^2 = \sin\lambda \cdot \sin\mu \cdot \sin\nu \cdot (a_f^2 \cdot \operatorname{ctg}\lambda + b_f^2 \cdot \operatorname{ctg}\mu + c_f^2 \cdot \operatorname{ctg}\nu + 4J_f)$$

konstant sein (für δ_f^2 wäre nur $-4J_f$ zu setzen). Also müßte sein:

$$AP^2 \cdot \sin^2\alpha \cdot \operatorname{ctg}\lambda + BP^2 \cdot \sin^2\beta \cdot \operatorname{ctg}\mu + CP^2 \cdot \sin^2\gamma \cdot \operatorname{ctg}\nu + \frac{OP^2 - r^2}{r^2} \cdot J = \frac{d_f^2}{\sin\lambda \cdot \sin\mu \cdot \sin\nu},$$

oder:

$$AP^2 \cdot a^2 \cdot \operatorname{ctg} \lambda + BP^2 \cdot b^2 \cdot \operatorname{ctg} \mu + CP^2 \cdot c^2 \cdot \operatorname{ctg} \nu + 4J \cdot OP^2 - 4r^2 \cdot J = \frac{4r^2 \cdot d_f^2}{\sin \lambda \cdot \sin \mu \cdot \sin \nu}.$$

Nun ist aber N das Baryzentrum zu $A_{a^2 \cdot \operatorname{ctg} \lambda} + B_{b^2 \cdot \operatorname{ctg} \mu} + C_{c^2 \cdot \operatorname{ctg} \nu}$; substituiert man also für die drei ersten Ausdrücke der Gleichung ihr Äquivalent nach dem Satz von Lagrange, so erhält man:

$$(a^2 \cdot \operatorname{ctg} \lambda + b^2 \cdot \operatorname{ctg} \mu + c^2 \cdot \operatorname{ctg} \nu) \cdot NP^2 + \frac{a^2 b^2 c^2 (\operatorname{ctg} \lambda \cdot \operatorname{ctg} \mu + \operatorname{ctg} \lambda \cdot \operatorname{ctg} \nu + \operatorname{ctg} \mu \cdot \operatorname{ctg} \nu)}{a^2 \cdot \operatorname{ctg} \lambda + b^2 \cdot \operatorname{ctg} \mu + c^2 \cdot \operatorname{ctg} \nu} + 4J \cdot OP^2 - 4r^2 J = \frac{4r^2 \cdot d_f^2}{\sin \lambda \cdot \sin \mu \cdot \sin \nu},$$

oder, da:

$$\operatorname{ctg} \lambda \cdot \operatorname{ctg} \mu + \operatorname{ctg} \lambda \cdot \operatorname{ctg} \nu + \operatorname{ctg} \mu \cdot \operatorname{ctg} \nu = 1,$$

und:

$$a^2 \cdot \operatorname{ctg} \lambda + b^2 \cdot \operatorname{ctg} \mu + c^2 \cdot \operatorname{ctg} \nu = \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2 + \delta^2}{\sin \lambda \cdot \sin \mu \cdot \sin \nu},$$

$$\frac{4r^2 \cdot d_f^2}{\sin \lambda \cdot \sin \mu \cdot \sin \nu} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2 + \delta^2}{\sin \lambda \cdot \sin \mu \cdot \sin \nu} \cdot NP^2 + 4J \cdot OP^2 + \frac{32 r^2 J^2 \cdot \sin \lambda \cdot \sin \mu \cdot \sin \nu}{d^2 + \delta^2} - 4r^2 J.$$

Die letzten beiden Ausdrücke der Gleichung ergeben, da $d^2 - \delta^2 = 8J \cdot \sin \lambda \cdot \sin \mu \cdot \sin \nu$:

$$\frac{4r^2 J (8J \cdot \sin \lambda \cdot \sin \mu \cdot \sin \nu - (d^2 + \delta^2))}{d^2 + \delta^2} = \frac{4r^2 J (d^2 - \delta^2 - d^2 - \delta^2)}{d^2 + \delta^2} = \frac{-8r^2 J \cdot \delta^2}{d^2 + \delta^2};$$

dies eingesetzt, folgt:

$$\frac{4r^2 \cdot d_f^2}{\sin \lambda \cdot \sin \mu \cdot \sin \nu} + \frac{8r^2 \cdot \delta^2 \cdot J}{d^2 + \delta^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2 + \delta^2}{\sin \lambda \cdot \sin \mu \cdot \sin \nu} \cdot NP^2 + 4J \cdot OP^2 = (a^2 \cdot \operatorname{ctg} \lambda + b^2 \operatorname{ctg} \mu + c^2 \cdot \operatorname{ctg} \nu) \cdot NP^2 + 4J \cdot OP^2.$$

Nun ist nach § 90:

$$\frac{OJ}{JN} = \frac{a^2 \cdot \operatorname{ctg}\lambda + b^2 \cdot \operatorname{ctg}\mu + c^2 \cdot \operatorname{ctg}\nu}{4J};$$

folglich nach bekanntem Satz:

$$(a^2 \cdot \operatorname{ctg}\lambda + b^2 \cdot \operatorname{ctg}\mu + c^2 \cdot \operatorname{ctg}\nu)\, NP^2 + 4J \cdot OP^2$$
$$= (a^2 \cdot \operatorname{ctg}\lambda + b^2 \cdot \operatorname{ctg}\mu + c^2 \cdot \operatorname{ctg}\nu + 4J) \cdot JP^2$$
$$+ \frac{(a^2 \cdot \operatorname{ctg}\lambda + b^2 \cdot \operatorname{ctg}\mu + c^2 \cdot \operatorname{ctg}\nu) \cdot 4J}{a^2 \cdot \operatorname{ctg}\lambda + b^2 \cdot \operatorname{ctg}\mu + c^2 \cdot \operatorname{ctg}\nu + 4J} \cdot ON^2;$$

also:

$$\frac{4r^2 \cdot d_f^2}{\sin\lambda \cdot \sin\mu \cdot \sin\nu} + \frac{8r^2 \cdot \delta^2 \cdot J}{d^2 + \delta^2} = \frac{d^2}{\sin\lambda \cdot \sin\mu \cdot \sin\nu} \cdot JP^2$$
$$+ \frac{4J \cdot \dfrac{d^2 + \delta^2}{2\sin\lambda \cdot \sin\mu \cdot \sin\nu}}{\dfrac{d^2}{\sin\lambda \cdot \sin\mu \cdot \sin\nu}} \cdot ON^2.$$

Das letzte Glied dieser Gleichung reduziert sich weiter auf:

$$\frac{2J \cdot (d^2 + \delta^2)}{d^2} \cdot ON^2,$$

und da nach § 89:

$$ON = \frac{2r \cdot d \cdot \delta}{d^2 + \delta^2},$$

auf:

$$\frac{8r^2 \cdot \delta^2 \cdot J}{d^2 + \delta^2};$$

also hebt er sich gegen das gleiche Glied auf der linken Seite der Gleichung, und es ergibt sich:

$$\frac{4r^2 \cdot d_f^2}{\sin\lambda \cdot \sin\mu \cdot \sin\nu} = \frac{d^2 \cdot JP^2}{\sin\lambda \cdot \sin\mu \cdot \sin\nu},$$

oder:

$$d_f : d = JP : 2r.$$

Daraus folgt also, daß die (λ, μ, ν)-Spannweite d_f im Fußpunktsdreieck konstant ist mit JP, d. h. für Kreise um den (λ, μ, ν)-Isomorphopol.

Für δ_f hätte man $4J$ negativ nehmen müssen, und eine ähnliche Untersuchung hätte auf den zweiten Isomorphopol J' geführt, und auf die Formel:

$$\delta_f : \delta = J'P : 2r.$$

100. Da nun also:

$$d_f : d = JP : 2r,$$

und:

$$\delta_f : \delta = J'P : 2r,$$

so ist:

$$\frac{d_f}{\delta_f} = \frac{d \cdot JP}{\delta \cdot J'P}.$$

Soll also das Verhältnis der zwei Spannweiten im Fußpunktsdreieck konstant sein, so bilden apollonische Kreise über den Isomorphopolen J und J' die geometrischen Örter.

101. Soll speziell

$$d_f : \delta_f = d : \delta$$

sein, also das Verhältnis der Spannweiten im Fußpunktsdreieck gleich dem des Grunddreiecks, so ist $JP = J'P$, der geometrische Ort also die (λ, μ, ν)-Kardinalachse.

102. Soll $d_f = \delta_f$ sein, so muß

$$JP : J'P = \delta : d$$

sein. Dies ist nach § 79 der Fall für die Punkte A, B, C, also überhaupt für den Umkreis. Das ersieht man auch daraus, daß nun sein muß:

$$a_f^2 \cdot \operatorname{ctg} \lambda + b_f^2 \cdot \operatorname{ctg} \mu + c_f^2 \cdot \operatorname{ctg} \nu + 4J_f = a_f^2 \cdot \operatorname{ctg} \lambda + b_f^2 \cdot \operatorname{ctg} \mu + c_f^2 \cdot \operatorname{ctg} \nu - 4J_f,$$

also $8J_f = 0$, oder $J_f = 0$. Es ist eben $d = \delta$, wenn $J = 0$.

103. Gegeben sind drei Dreiecke. Man soll einen Punkt finden, so daß dessen drei Fußpunktsdreiecke gleiche (λ, μ, ν)-Spannweiten d_f oder δ_f besitzen. Die Lösung ist nach den Proportionen in § 100 leicht durch apollonische Kreise zu bewerkstelligen. Sind die drei Dreiecke ähnlich, so ist der gesuchte

Punkt das Umkreiszentrum zu den drei (λ, μ, ν)-Isomorphopolen der gegebenen Dreiecke.

104. Die Barytome als Spezialfall des Spannvektors. Der Lehrsatz über d_f in § 99 hat eine weittragende Bedeutung. Wir wissen nämlich durch denselben, daß auch für die Konstanz der Spannweite d_f oder des Spannvektors AL_f im Fußpunktsdreieck der geometrische Ort abermals durch Kreisscharen um einen bestimmten Punkt gebildet wird, und zwar hat das Zentrum dieser Kreisscharen jetzt ganz allgemeine Lage in der Ebene des Grunddreiecks ABC. Bei allen früheren isogonisch-zentrischen Untersuchungen, welche Kreise als geometrische Örter ergaben, war im Gegensatz hierzu die Lage des Zentrums auf den Umkreis beschränkt; so nicht nur unter der Bedingung der Konstanz der Seiten a_f, b_f, c_f, sondern auch bei der Transversale t_f, bei der Barytome v_f, ja gar bei der allgemeinen Baryzyge s_f.

Es ist auch nicht schwer, das Korrelat dieser Beschränkung in den Daten der jeweiligen Aufgaben zu finden. Es handelte sich bisher jedesmal um die Konstanz von Fahrstrahlen, deren einer Endpunkt in einer bestimmten Ecke des Fußpunktsdreiecks (etwa X) lag, während der andere Endpunkt irgendwie an die Gegenseite YZ gebunden war. Für die Seite b_f z. B. lag dieser Endpunkt in Z ($XZ = b_f$ konstant), für c_f in Y, für die Transversale in der Mitte von YZ, für die Barytome in einem durch den Modul $m : n$ bestimmten Punkte der Gegenseite; auch die Baryzyge SS' ließ sich auf eine solche allgemeine Barytome reduzieren.

Das Problem der Konstanz der Spannweite hat uns weiter geführt. Soll d_f konstant sein, so handelt es sich um die Konstanz des Spannvektors AL (Fig. 46). Hier liegt L nicht mehr auf BC, und im Fußpunktsdreieck L' nicht mehr auf YZ, sondern beliebig in der Ebene des Dreiecks; die Lage der Punkte L und L' ist durch λ, μ, ν bestimmt. Das Korrelat ist, daß das Kreisscharenzentrum nicht mehr (wie U in Barytomik, § 33) an den Umkreis gebannt ist, sondern beliebig liegt,

wie J in Fig. 46; die Lage von J ist ebenfalls einzig durch λ, μ, ν bestimmt: diese Winkel müssen im Fußpunktsdreieck von J erscheinen.

Alsbald wird man bei dieser Überlegung erkennen, daß die Barytome (und damit Transversale und Seite) nur ein Spezialfall des allgemeinen Fahrstrahls AL im Grunddreieck (XL' im Fußpunktsdreieck) ist. Legt sich nämlich L auf BC, so ist definitionsgemäß AL eine „Barytome"; $BL:CL = n:m$ ihr Modul; die Winkel λ, μ, ν werden zu 180°, 0, 0, oder 0, 180°, 0, oder 0, 0, 180° (je nach der Lage von L zwischen BC, oder links oder rechts von B und C). Ganz ähnliches gilt natürlich im Fußpunktsdreieck für die Lage von L' auf YZ.

Soll jetzt der Spannvektor XL', auch wenn L' auf YZ fällt, konstant sein, so gilt immer noch der Satz von § 99: XL' ist konstant für Kreise um einen Pol J, in dessen Fußpunktsdreieck die Winkel 180°, 0, 0 sind, der also auf dem Umkreis des Dreiecks liegt, und für den:

$$\frac{BJ \cdot \sin\beta}{CJ \cdot \sin\gamma} = \frac{m}{n},$$

also:

$$\frac{BJ}{CJ} = \frac{m}{n} \cdot \frac{c}{b}.$$

Wir wissen diesen Punkt nach Barytomik, § 22 zu konstruieren: man teile BC in D im Verhältnis $m:n$, und konstruiere den Inversionsstrahl zu AD; dadurch erhalten wir auf dem Umkreis den Punkt U als den gesuchten Isomorphopol (nunmehr speziell Barytomenpol).

Der Hauptsatz von den Barytomen im Fußpunktsdreieck (Barytomik, § 29 ff.) ist also nur ein Spezialfall des obigen Hauptsatzes der Isomorphopolzentrik für Fußpunktsdreiecke (oben § 99).

Natürlich macht es auch hier keinen Unterschied, an welcher Ecke wir den Spannvektor ziehen — AL, oder BM, oder CN: das Resultat wird genau das gleiche sein. Ganz ebenso machte dies keinen Unterschied für die Transversalen t_f, t'_f, t''_f, oder die Barytomen v_f, v'_f, v''_f (Barytomik, § 34).

105. Wie am Schluß der Barytomik, wird es auch hier von Interesse sein, syzygetische Dreiecke an Grunddreieck und Fußpunktsdreieck nachzuweisen, die in augenfälliger Weise schnelle Übersicht gewähren, unter welchen Bedingungen gewisse, mit den Spannvektoren zusammenhängende Strecken und Winkel im Fußpunktsdreieck konstant werden.

Wir betrachten in Fig. 46 das Fußpunktsdreieck XYZ von P. Hier ist zunächst $XY = c_f$, $YZ = a_f$; errichtet man über der Seite YZ ein Dreieck $L'YZ$ mit den Winkeln λ, μ, ν, und zieht XL', so ist der Fahrstrahl $XL' = f_f = \frac{d_f}{\sin \lambda}$. Man wird nun bei näherer Betrachtung finden, daß $\triangle AJC$ syzygetisch ist zu XYL', in Zeichen:

$$AJC \cong XYL'.$$

Es wird nämlich die erste Seite XY von XYL' konstant für Kreise um C, die zweite XL' für Kreise um J; die dritte YL' aber ist $= \frac{ZY \cdot \sin \nu}{\sin \lambda} = \frac{a_f \cdot \sin \nu}{\sin \lambda}$, also konstant mit YZ, d. h. für Kreise um A.

Wir wollen nun auch die Frage nach der Konstanz der Winkel von XYL' erheben. Es ist zunächst $\angle XYL' = XYZ + ZYL' = XYZ + \mu$, also konstant mit $\angle XYZ$, d. h. für Kreisbogen über AC. Um nun zu beweisen, daß auch $\angle YXL' = (fc)_f = \xi_f$ konstant ist für Kreisbogen über CJ, müssen wir etwas weiter ausholen.

Aus $\triangle XYL'$ ergibt sich:

$$\sin \xi_f = \frac{\sin XYL' \cdot YL'}{XL'},$$

allein:

$$XYL' = \beta_f + \mu = APC + \beta + \mu = APC + AJC$$
$$= (AMC - MAP) + AJC = 2R - MAP;$$

also:

$$\sin XYL' = \sin MAP;$$

weiter:

$$YL' = \frac{ZY \cdot \sin \nu}{\sin \lambda} = \frac{AP \cdot \sin a \cdot \sin \nu}{\sin \lambda},$$

und:

$$XL' = \frac{AL \cdot JP}{2r},$$

also:

$$\sin \xi_f = \frac{AP \cdot \sin a \cdot \sin \nu \cdot \sin MAP}{\sin \lambda} \cdot \frac{2r}{AL \cdot JP}$$

$$= \frac{AP \cdot \sin MAP \cdot a \cdot \sin \nu}{d \cdot JP} = \frac{MP \cdot \sin AMC \cdot a \cdot \sin \nu}{d \cdot JP}.$$

Nun ist:

$$\frac{\sin AMC \cdot a \cdot \sin \nu}{d} = \frac{\sin(\beta + \mu) \cdot a \cdot \sin \nu}{AL \cdot \sin \lambda} = \frac{\sin(\beta + \mu)}{AL} \cdot BL$$

$$= \sin BAL = \sin CAJ = \sin \xi.$$

Setzt man dies oben ein, so kommt:

$$\sin \xi_f = \frac{MP}{JP} \cdot \sin \xi = \frac{PN}{CP} \cdot \sin \xi;$$

aber:

$$\frac{PN}{CP} = \frac{\sin NCP}{\sin JNC},$$

wo:

$$JNC = JAC = BAL = \xi;$$

eingesetzt:

$$\sin \xi_f = \frac{\sin NCP}{\sin \xi} \cdot \sin \xi = \sin NCP;$$

also ist $\xi_f = PCN$ (oder dessen Nebenwinkel); und da $PCN = CNJ - CPJ = \xi - CPJ$, so ist:

$$\xi_f = \xi - CPJ,$$

also ξ_f konstant mit CPJ, d. h. für Kreise über JC.

Der Winkel PCN ist auch gleich dem Winkel der Kreise ACN und JCP; man bekommt natürlich als geometrischen Ort wieder zwei, diesmal zu Kreis ACJ isokline Kreisbogen als Örter für P.

Selbstverständlich würde man finden, daß Winkel $XL'Y$ konstant wird für Kreisbogen über AJ.

106. Wir fragen weiter, wann die Höhe YH' von Y auf den Fahrstrahl XL' konstant ist.

Lösung. Es ist $YH' = XY \cdot \sin \xi_f = CP \cdot \sin \gamma \cdot \sin NCP = NP \cdot \sin JNC \cdot \sin \gamma = NP \cdot \sin \xi \cdot \sin \gamma = NP \cdot \sin BAL \cdot \sin \gamma = NP \cdot \frac{BH}{c} \cdot \sin \gamma$; oder in Form einer Proportion geschrieben:

$$YH' : BH = NP : 2r.$$

Da BH und $2r$ konstant sind, folgt, daß YH' konstant ist mit PN, also offenbar für eine Konchoide an den Kreis AJC mit dem Doppelpunkt in J. Soll speziell YH' gleich der entsprechenden Höhe BH des Grunddreiecks sein, so ist $PN = 2r$, und die Konchoide wird zur Kardioide an den Kreis AJC mit Spitze in J.

Wir könnten auch die Frage nach der Konstanz der Projektionen XH' oder $L'H'$ stellen; doch sollen diese und ähnliche Probleme in einem besonderen Aufsatz, der „pedalen Katablematik", ihre Erledigung finden.

107. Wann ist der Inhalt des Dreiecks XYL' konstant? Lösung.

$$\triangle XYL' = \tfrac{1}{2} XL' \cdot YH' = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{AL \cdot JP}{2r} \cdot \frac{BH \cdot NP}{2r}$$

$$= \triangle BAL \cdot \frac{JP \cdot NP}{4r^2};$$

da nun $\triangle BAL$ und $4r^2$ konstant sind, so wird $\triangle XYL'$ konstant mit $PJ \cdot PN$, d. h. mit der Potenz von P an Kreis AJC, also für Kreisscharen, die mit Kreis AJC konzentrisch sind. Bezeichnet man diese Potenz mit Π, so gilt die Proportion:

$$\triangle XYL' : \triangle ABL = \Pi : 4r^2.$$

Die Ausdehnung der Untersuchung auf die Transversalen u. s. w. von XYL' würde entsprechende Resultate ergeben.

Wir sehen also, daß in der Tat die Dreiecke XYL' und AJC syzygetisch sind. Ebenso ist $AJB \cong XZL'$; denn abermals ist XL' konstant für Kreise um J; XZ konstant für

Kreise um B, und $L'Z = \frac{a_f \cdot \sin\mu}{\sin\lambda}$ konstant für Kreise um A u. s. w.

108. Wir können noch einen Schritt weiter gehen. Wir denken uns über YZ noch ein zweites Dreieck YZL'' mit den Winkeln λ_1, μ_1, ν_1 konstruiert, und suchen nun das syzygetische Dreieck zu $XL'L''$ auf. XL' ist natürlich wieder konstant für Kreise um den (λ, μ, ν)-Isomorphopol J; analog wird XL'' konstant sein für Kreise um den $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$-Isomorphopol J_1; die Seite $L'L''$ ist offenbar eine Funktion der Variabeln YZ in Verbindung mit den Konstanten λ, μ, ν und λ_1, μ_1, ν_1, also konstant mit YZ, d. h. für Kreise um A. Es ist also AJJ_1 das syzygetische Dreieck zu $XL''L'$. Sonach werden wir schließen, daß $\angle L'XL''$ konstant ist für Kreise über JJ_1.

Dies läßt sich natürlich auch leicht direkt beweisen, indem man $\angle L'XL'' = YXZ - L'XY - L''XZ$ setzt und § 105 anwendet.

Leicht können wir analoge Schlüsse für die Höhen, den Inhalt u. s. w. des Dreiecks $XL'L''$ machen.

Die letzten Sätze sind von großer Allgemeinheit; denn wir können jetzt einmal die isogonisch-zentrische Eigenschaft eines Kreises um ein beliebiges Zentrum J angeben — für ihn ist der (λ, μ, ν)-Spannvektor konstant — und auch die Eigenschaft für einen Kreis durch zwei beliebige Punkte J und J_1: für letzteren ist der Winkel zwischen den (λ, μ, ν)- und $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$-Spannvektoren im Fußpunktsdreieck konstant. Apollonische Kreise über JJ_1 endlich würden konstantes Verhältnis der Spannweiten D_f und D_{1f} ergeben.

IX. Winkeldifferenzen am Visierpunkt und im Fusspunktsdreieck.

109. Wir wollen in diesem letzten Kapitel die Winkelprobleme früherer Abschnitte noch ergänzen. In Kapitel II ist ausführlich gezeigt worden, wann der Winkel eines Fuß-

punktsdreiecks konstant ist. Ist nun die Frage vorgelegt, wann die Summe zweier Winkel in einer Fußpunktsfigur konstant ist, so gäbe dies für ein Viereck oder ein höheres Polygon alsbald eine interessante Aufgabe. Für das Dreieck dagegen ergibt sich nichts Neues; denn wenn die Summe zweier Winkel konstant sein soll, muß auch der dritte Winkel für sich konstant sein, und die Lösung dieser Aufgabe kennen wir ja eben aus § 19 ff.

Dagegen ergibt sich auch für das Dreieck eine anziehende Untersuchung, wenn wir die Forderung stellen, daß im Fußpunktsdreieck zwei Winkel eine gegebene Differenz haben sollen.

110. Es sei ABC ein beliebiges Dreieck, P ein beliebiger Punkt, und XYZ dessen Fußpunktsdreieck (vgl. Fig. 47). Soll nun $\beta_f - \gamma_f$ konstant $= \delta$ sein, so ist:

(1) $$XYZ - XZY = APC - \beta - (APB - \gamma) = APC - APB - (\beta - \gamma).$$

Man sieht so zunächst, daß die Differenz zweier Winkel im Fußpunktsdreieck $\beta_f - \gamma_f$ konstant ist mit der Differenz zweier entsprechender Visierwinkel $APC - APB$.

Man ziehe nun weiter den Durchmesser AOE und die Geraden EC und EB, welch letztere auf AC und AB senkrecht stehen werden, endlich die Gerade FG in P senkrecht auf AP. Dann ist $APCF$ ein Kreisviereck (denn $\angle APF = ACF = R$), also $APC = 2R - AFC$; auch ist $APBG$ ein Kreisviereck (denn $\angle APG = ABG = R$), also $APB = 2R - AGB$; folglich ist:

$$APC - APB = AGB - AFC = (R - GAB) - (R - CAF) = CAF - GAB;$$

folglich nach (1):

$$\beta_f - \gamma_f = CAF - GAB - (\beta - \gamma).$$

Man mache nun $\angle FAK = GAB$, so ist $CAF - GAB = CAK$, und:

(2) $$\beta_f - \gamma_f = CAK - (\beta - \gamma).$$

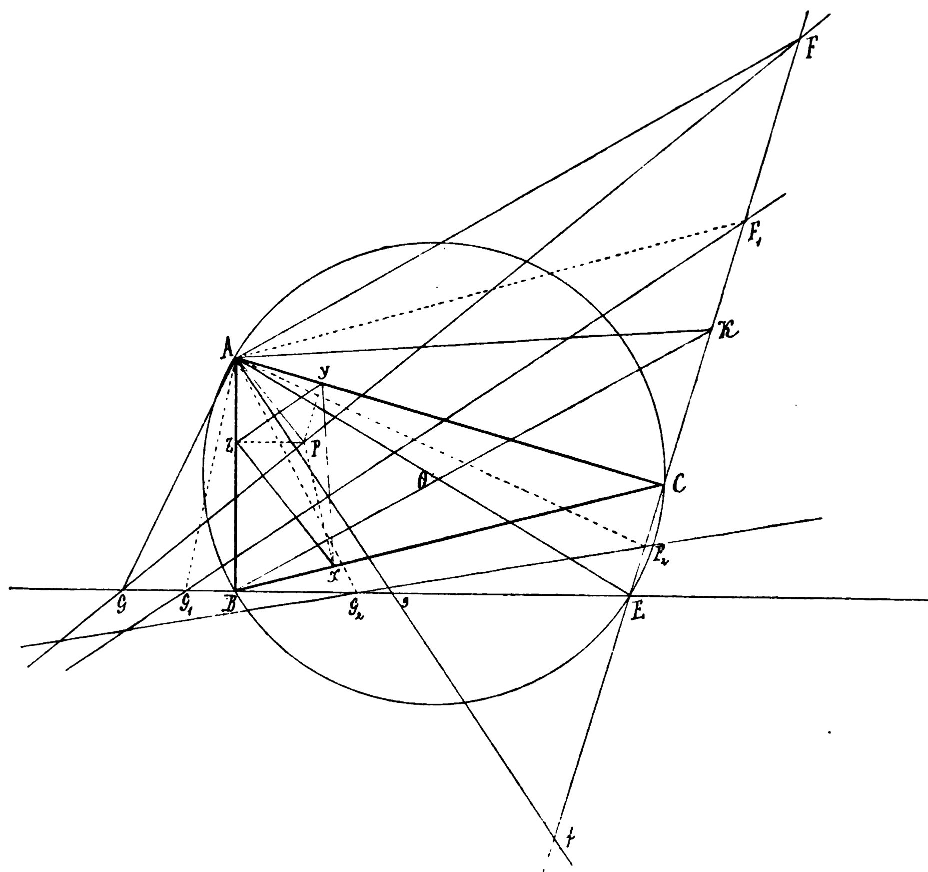


Fig. 47.

Wenn nun $\beta_f - \gamma_f = \delta$ gegeben ist, so ist nach Gleichung (2) auch CAK gegeben; der Punkt K ist also leicht zu konstruieren. Es liegen dann nach den Bedingungen der Aufgabe AK und AB fest, und an diese Strecken sind AG und AF so angelegt, daß $\angle GAB = KAF$. Läßt man nun P variieren, so wird bei konstantem δ auch Punkt K fest bleiben, dagegen werden neue Strahlenpaare AF_1, AG_1, AF_2, AG_2 u. s. w. entstehen, die je mit den Seiten AK und AB gleiche

Winkel φ bilden. Wir erhalten also am Punkte A zwei kongruente Strahlenbüschel AF, AF_1, AF_2 ... und AG, AG_1, AG_2 ... Diese werden auf den Geraden EF und EG die projektiven Punktreihen F, F_1, F_2 ..., G, G_1, G_2 ... ausschneiden; die Verbindungslinien entsprechender Punkte, nämlich FG, F_1G_1, F_2G_2 u. s. w. umhüllen also einen Kegelschnitt, und da AP senkrecht auf der Tangente FG steht, so ist der Ort von P offenbar die Fußpunktskurve von A als Pol an diesen Kegelschnitt.

Man sieht alsbald, daß auch BK eine Tangente dieses Kegelschnittes ist ($\varphi = 0$); ferner die Halbierungslinien des Winkels BAK und seines Supplementes, sowie natürlich die Träger der beiden projektiven Punktreihen EC und EB. Konstruiert man zu dem Schnitt E der letzteren den Strahl AE und macht $\angle BAf = EAK$, so werden die Schnittpunkte f und g des Strahls Af mit den Achsen EC und EB die Berührungspunkte des Kegelschnittes sein.

111. Wie wir sahen, gilt für alle Punkte der Kurve die Gleichung:

$$\delta_f = \beta_f - \gamma_f = CAK - (\beta - \gamma) = \varkappa - (\beta - \gamma).$$

Es wird aber gut sein, gleich an dieser Stelle auf gewisse Zeichenschwierigkeiten hinzuweisen, die wir im folgenden zur richtigen Deutung der Resultate und der Figuren stets im Auge haben müssen. Die Schwierigkeiten liegen im wesentlichen darin, daß ein Winkel im Fußpunktsdreieck α_f von BPC abhängt, wobei jedoch BPC je nach der Lage von P bald positiv bald negativ zu nehmen ist. Liegen P und A auf der gleichen Seite von BC, so ist $\alpha_f = BPC - \alpha$, wenn P innerhalb des Umkreises liegt, $\alpha_f = \alpha - BPC$, wenn P außerhalb liegt. Liegen aber P und A auf verschiedenen Seiten, so ist $\alpha_f = BPC + \alpha$, wenn P außerhalb, und $\alpha_f = 4R - BPC - \alpha$, wenn P innerhalb des Umkreises liegt. Dies haben wir schon bei der einfachen, in § 109 angedeuteten Summationsaufgabe zu beachten. Liegt hier nämlich Punkt P

etwa im Innern des Dreiecks (Fig. 48), so ist $\beta_f + \gamma_f = APC + APB - (\beta + \gamma)$, also konstant mit der Summe von $APC + APB$, d. h. mit dem Winkel BPC.

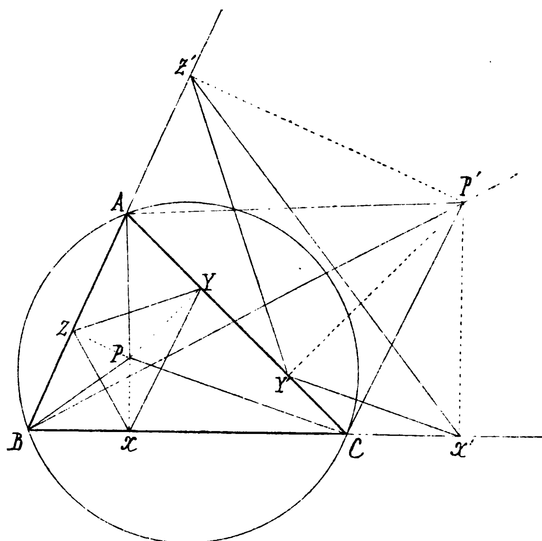


Fig. 48

Kommt aber P etwa in die Lage P', so ist:

$$\beta_f = AP'C + \beta \text{ und } \gamma_f = \gamma - AP'B;$$

es hat also $AP'B$ das Zeichen gewechselt. Auf das Schlußresultat hat dieser Zeichenwechsel keinen Einfluß; denn für die Summe $\beta_f + \gamma_f$ ergibt sich nun:

$$\beta_f + \gamma_f = AP'C - AP'B + \beta + \gamma,$$

also ist $\beta_f + \gamma_f$ abermals konstant mit $\angle BP'C = AP'C - AP'B$, d. h. für Kreise über BC.

112. Weniger übersichtlich gestalten sich die Verhältnisse, wenn die Differenz $\beta_f - \gamma_f$ in Frage kommt. So ist für die Lage des Punktes P in Figur 49:

$$\beta_f = XYZ = APC + \beta, \ \gamma_f = XZY = \gamma - APB;$$

Fig. 49.

also:

$$\beta_f - \gamma_f = \beta - \gamma + APC + APB.$$

Es soll also hier die Summe $APC + APB$ konstant sein. Die weitere Behandlung ist jedoch genau die gleiche wie in § 110; wir ziehen wieder CE senkrecht auf AC und BE senkrecht auf AB und errichten in P die Senkrechte PFG auf AP. Dann ist

$$APC = AFC = R - CAF \text{ und } APB = AGB = R - BAG,$$

also:

$$APC + APB = 2R - (BAG + CAF).$$

Es muß also die Summe der an AB und AC angelegten Winkel BAG und CAF konstant sein. Dadurch werden F und G abermals Elemente projektiver Punktreihen auf CE und BE, und FG die Umhüllende eines Kegelschnittes (denn nimmt man etwa $\angle CAF'$ etwas größer als CAF, so muß der entsprechende Winkel BAG' um dieselbe Größe $G'AG = F'AF$ kleiner sein als BAG; man erhält also an A zwei kongruente Strahlenbüschel AF, AF' ... und AG, AG' u. s. w.).

Fig. 50.

113. Nach dieser Vorausschickung schreiten wir nun zur Diskussion der einzelnen Fälle unserer Fußpunktskurve für konstantes $\beta_f - \gamma_f$.

Soll $\beta_f - \gamma_f = 0$ sein (also $\beta_f = \gamma_f$ und das Dreieck gleichschenklig), so muß nach der Formel in § 111

$$CAK = \varkappa = \beta - \gamma$$

sein.

Dann ist zugleich (Fig. 50) $\angle EAK = OAC + \beta - \gamma = R - \beta + \beta - \gamma = R - \gamma = BAE$; es ist hier also AE die Winkelhalbierende zu BAK. Zieht man ferner an den Umkreis in A die Tangente DAM, so ist $\angle CAM = \beta$, also $KAM = \gamma$ (da ja $CAK = \beta - \gamma$), folglich auch $KAM = DAB$.

Man ziehe nun beliebig unter gleichen Winkeln die entsprechenden Strahlen AG und AF, so daß $\angle GAB = KAF$ (also auch $LAG = FAM$, da ja $LAB = KAM = \gamma$). Nun halbiert AE den Winkel FAG und AL steht senkrecht auf AE; also sind AL, AE, AG und FA vier harmonische Strahlen, und die Punkte F, G, R (Durchschnitt mit AE) und N (Durchschnitt mit AD) vier harmonische Punkte. Projiziert man diese vier Punkte von E aus auf die Tangente in A an den Umkreis, so sind auch M, L, A und N vier harmonische Punkte, und der Punkt N hat also eine ganz bestimmte Lage. Läßt man F und G auf den Trägern BE und CE variieren, so jedoch, daß natürlich AF und AG immer isoklin zu AK und AB bleiben, so wird also die Umhüllende des Kegelschnittes FG auch in den Lagen $F_1 G_1$, $F_2 G_2$ u. s. w. immer durch den festen Punkt N gehen. Wir erhalten also als Abart des Kegelschnittes eine Strecke: die einen Tangenten gehen, wie wir sahen, durch N, alle anderen, wie AE, BE, CE, durch den Punkt E; die Strecke EN repräsentiert also hier den Kegelschnitt.

114. Wir wollen nun die Lage des Punktes N genauer bestimmen. Aus Fig. 50 folgt:

$$AM = AE \cdot \operatorname{tg} AEM = 2r \cdot \operatorname{tg} \beta; \; AL = 2r \cdot \operatorname{tg} \gamma;$$

also:

$$LM = 2r \cdot (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma).$$

Weiter ist:

$$\frac{NM}{NL} = \frac{AM}{AL} = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\gamma};$$

also:

$$\frac{NM - NL}{NL} = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\gamma},$$

oder:

$$\frac{LM}{NL} = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\gamma},$$

also:

$$NL = LM \cdot \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\gamma} = 2\,r \cdot \operatorname{tg}\gamma \cdot \frac{\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\gamma};$$

also endlich:

$$AN = AL + LN = 2\,r\operatorname{tg}\gamma\left(1 + \frac{\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\gamma}\right)$$

$$= 4\,r \cdot \frac{\operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\gamma} = \frac{4\,r \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}{\cos\beta \cdot \cos\gamma \cdot \left(\frac{\sin\beta}{\cos\beta} - \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}\right)}$$

$$= \frac{2\,b \cdot \sin\gamma}{\sin(\beta - \gamma)} = \frac{2\,h}{\sin(\beta - \gamma)}.$$

Nun ist aber offenbar $AD = \frac{h}{\sin(\beta - \gamma)}$ (denn $\angle ADB = ABC - BAD = \beta - \gamma$); folglich ist $AN = 2\,AD$.

115. Hiernach ist unsere Fußpunktskurve in diesem Spezialfall schnell bestimmt. Die eine Schar umhüllender Tangenten geht durch N; der Fußpunkt S des Perpendikels von A auf eine beliebige Tangente $F_2 G_2$ liegt also auf einem Kreis über AN als Durchmesser. Dieser Kreis mit dem Zentrum in D, offenbar der erste Äquilateralkreis von ABC, ist mithin der gesuchte Ort, für den $\beta_f = \gamma_f$ (also auch $b_f = c_f$) ist.

Somit haben wir auf ganz anderem Wege ein uns längst bekanntes Resultat über gleichschenklige Fußpunktsdreiecke abgeleitet (Grundlagen, § 21).

Die zweite Schar der Tangenten geht dagegen durch E. Fällen wir auf eine beliebige derselben von A aus eine Senk-

rechte, so wird der Fußpunkt auf einem Kreise über AE liegen; dieser Kreis ist aber der Umkreis des Dreiecks. Tatsächlich erfüllt dieser Kreis die Bedingung $\beta_f - \gamma_f = 0$ ebenfalls, da für den Bogen BEC sowohl β_f als $\gamma_f = 0$ sind (für den Bogen BAC ist die Differenz der Winkel das Supplement zu Null, nämlich 180^0).

In diesem speziellen Fall besteht also unser geometrischer Ort aus zwei Kreisen, dem Umkreis von $\triangle ABC$ und dem ersten Äquilateralkreis.

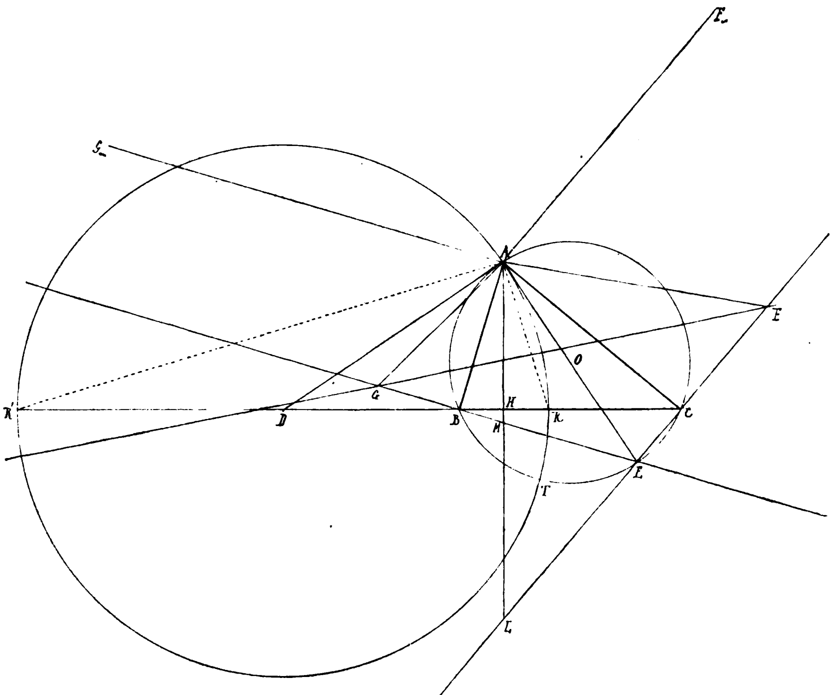


Fig. 51.

116. Wir betrachten nun den Fall, wo $\varkappa = CAK = 0$ ist, also nach der Formel in § 111 $\beta_f - \gamma_f = \gamma - \beta$. Man hat dann hier die gleichen Winkel φ unmittelbar an die Seiten AB und AC anzulegen, so daß also $\angle CAF = BAG$ ist (Fig. 51).

Hierdurch werden die Dreiecke CAF und BAG ähnlich, und deswegen ist $BG : CF = AB : AC = BG' : CF'$ u. s. w. Man hat hier also ähnliche Punktreihen, und der Kegelschnitt wird zur Parabel. Natürlich entsprechen sich hier auch die unendlich fernen Punkte der Punktreihen, wie man direkt an der Figur sehen kann: die Senkrechte AF_∞ auf AC geht nach dem unendlich fernen Punkt von CE; der entsprechende Strahl AG_∞ muß senkrecht auf AB stehen und geht also durch den unendlich fernen Punkt von EB.

117. Es ist leicht, die Berührungspunkte der Parabel mit den Trägern der Punktreihen EC und EB zu konstruieren. Man zieht den Strahl AE nach ihrem Schnitt E und invertiert ihn in A so, daß $\angle BAH = CAE$. Da nun $\angle EAC = R - \beta$, so ist auch $BAH = R - \beta$, also ist AH die Höhe auf BC. Der Strahl AH aber, der ja AE entspricht, schneidet auf EC und EB die Berührungspunkte L und M aus.

Die Parabel muß ferner die Seite BC berühren, desgleichen die Winkelhalbierungslinien AR und AR' zu BAC und dessen Nebenwinkel. Da also BC, BE, CE Tangenten der Parabel sind, so muß ihr Brennpunkt auf dem Umkreis von BCE, d. h. dem Umkreis von ABC liegen. Da ferner auch BC, AR und AR' ein Tangentendreieck bilden, so liegt der Brennpunkt auch auf dem Kreis ARR'. Nun sind R und R' die Fußpunkte der Winkelmedianen, also ist $R'AR$ ein Rechter, und der Kreis um ARR' ist der erste Äquilateralkreis des Dreiecks. Es schneiden sich aber Umkreis und Äquilateralkreis im Transversalpol; folglich ist der erste Transversalpol T des Dreiecks der Brennpunkt der Parabel.

118. Die Scheiteltangente der Parabel finden wir (Fig. 52), indem wir von T aus auf die Seiten des Dreiecks BCE die Senkrechten TD, TG, TK fällen; die entstehende Gerade DGK ist die Scheiteltangente. Um ihre Lage zu bestimmen, bedenke man, daß $\angle TDG = TBG = TBE = TAE = BAE - BAT = R - \gamma - (bt) = R - (ta) = HAF$, wo F die Mitte von BC. Da nun $AH \parallel DT$, so ist deswegen auch $DG \parallel AF$,

d. h. die Scheiteltangente der Parabel ist parallel mit der Transversale AF.

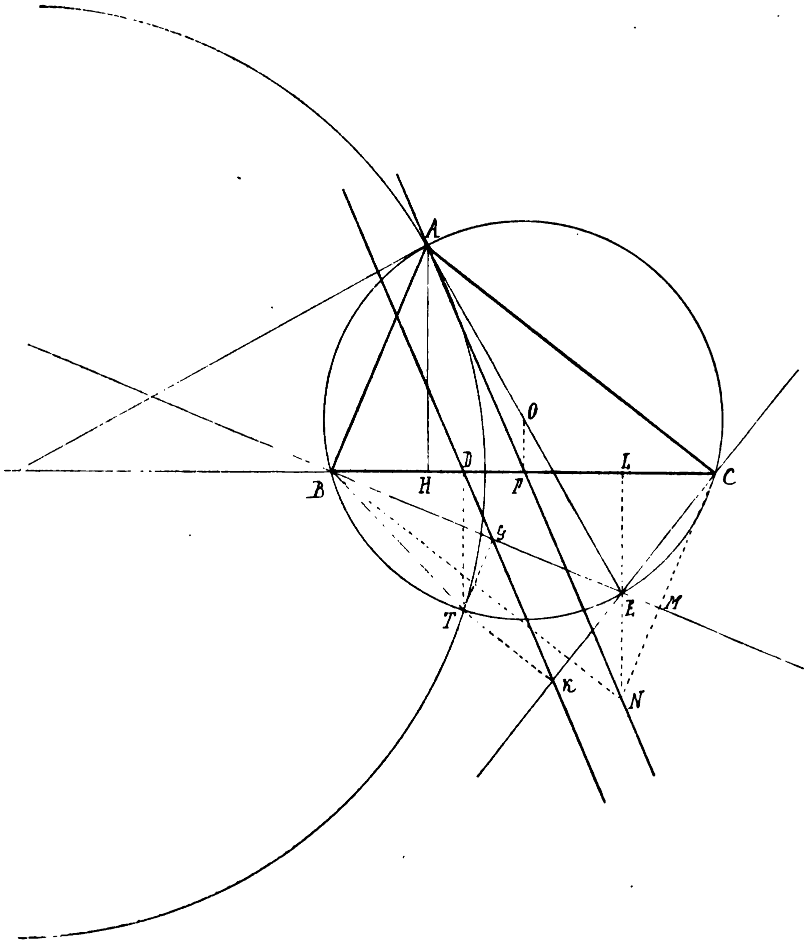


Fig. 52.

119. Die Direktrix der Parabel muß den doppelten Abstand von T haben (sie muß die Spiegelgerade zu DG von T aus sein); sie geht also nach § 48 durch den Höhenschnitt des Tangentendreiecks BEC. Letzterer Punkt ist aber kein

anderer, als der Endpunkt N der um sich selbst verlängerten Transversale AF. Fällt man nämlich die Höhe EL von E auf BC, so ist $EL \parallel OF$, also $AF = FN$; deswegen $ABNC$ ein Parallelogramm, $\angle BCN = ABC = \beta$; da nun $CBE = R - \beta$, so muß CMB ein Rechter, und also CM die Höhe auf BE sein. Mithin ist N tatsächlich der Höhenschnitt von Dreieck BEC.

Wir wissen nun, daß die Direktrix der Parabel einmal durch N gehen muß, und zweitens, daß sie parallel mit der Transversale AF sein muß. Es kann also nur die Transversale AFN selbst die Direktrix sein.

120. Damit haben wir die Lage der Parabel genau festgelegt. Sie muß die Geraden BE, CE, BC berühren; ihre Berührungspunkte f und g mit CE und BE werden durch die Höhe AH ausgeschnitten. In Fig. 53 ist dann weiter die Fußpunktskurve der Parabel von Pol A aus konstruiert; diese Kurve ist unser gesuchter Ort; jeder Punkt P der Kurve gibt im Fußpunktsdreieck auf ABC die Differenz $\beta_f - \gamma_f = \gamma - \beta$ (oder auch, von jedem Punkt P der Kurve aus ist $\angle APB = \angle APC$). Es liegen auf der Kurve der Fußpunkt H der Höhe AH; ferner die drei Ecken A, B, C (für sie ist $\beta_f - \gamma_f$ unbestimmt; es kann also auch der spezielle Wert $\gamma - \beta$ für diese Differenz eintreten); endlich liegen auch die zwei Äquivisierpunkte V und V' auf der Kurve (vgl. oben § 36).

Die Schleife der Kurve liegt innerhalb des ersten Äquilateralkreises, die zwei in die Unendlichkeit sich erstreckenden Äste außerhalb dieses Kreises. Aus dieser Tatsache ergibt sich, daß $\beta_f - \gamma_f$ für den einen Teil der Kurve $= \gamma - \beta$, für den andern $= \beta - \gamma$ ist (denn bei Überschreitung des Äquilateralkreises wechselt das Zeichen), daß man also vom Vorzeichen von δ_f absehen muß, wenn man die ganze Kurve als geometrischen Ort betrachtet. Andererseits muß es dafür noch eine zweite Kurve geben, die die gleichen Bedingungen erfüllt. Macht man nämlich:

$$\varkappa = CAK = 2(\beta - \gamma),$$

F_1

so wird nach der Formel in § 111 wiederum:

$$\beta_f - \gamma_f = 2(\beta - \gamma) - (\beta - \gamma) = \beta - \gamma.$$

Wir bekommen also einen zweiten Punkt K so, daß $\angle CAK = 2(\beta - \gamma)$, und dem entsprechend auch einen zweiten Kegelschnitt samt zugehöriger Fußpunktskurve.

Dies wird auch allgemein gelten, vgl. unten § 124.

121. Lassen wir nun $\delta = \beta_f - \gamma_f$ und damit den Punkt K auf CE variieren, so werden wir je nach der Konfiguration auch die anderen Kegelschnitte, Ellipse und Hyperbel, erlangen. Machen wir zunächst $\varkappa = CAK$ recht klein (zwischen 0 und $\beta - \gamma$), so sehen wir (Fig. 54), daß der Fluchtpunkt G_1 aus der Unendlichkeit herein gegen B zu rückt (nämlich es muß jetzt der $\angle G_1AB = KAF_\infty = R - CAK = R - G_1AG_\infty$ sein; der Fluchtpunkt G_1 liegt also innerhalb des Winkels BAG_∞). Um die Berührungspunkte T und U des Kegelschnitts mit den Punktreihenträgern BE und CE zu finden, konstruiere den Strahl, der AE entspricht, indem man $\angle BAT = EAK$ macht. Ist nun K hinlänglich nahe an C, so wird die Gerade ATU auch noch links von AE fallen, und der Berührungspunkt T liegt dann zwischen dem Fluchtpunkt G_1 und dem Schnitt der Träger E. Der erzeugte Kegelschnitt ist alsdann eine Ellipse, und die Fußpunktskurve nimmt die wohlbekannte Form mit Doppelpunkt und Schleife an, von der Kreiskonchoide und Kardioide ein Spezialfall sind.

Dies war schon aus der Tatsache zu erwarten, daß für $\delta = 0$ der Umkreis und der erste Äquilateralkreis zusammen den geometrischen Ort bildeten; eine leichte Deformation dieser Kreise führt zu einer Kurve wie in Fig. 54.

Zusatz. Es mag noch erwähnt sein, daß die Ecken des Dreiecks A, B, C auch hier, wie in jedem Fall, auf der Fußpunktskurve liegen, da ja für sie $\beta_f - \gamma_f$ unbestimmt ist.

122. Ganz leicht erhalten wir auch einen Fall, wo der Kegelschnitt eine Hyperbel ist. Sei in Fig. 55 ABC das Grunddreieck, $CAK = \varkappa$ verhältnismäßig groß ($> \beta - \gamma$) und

man lege die gleichen Winkel an AB und AK an. Der Fluchtpunkt G_1 liegt hier wieder so, daß $G_1AB = KAF_\infty$ ist, also links von B; der Strahl AF, welcher AE entspricht, liegt so, daß $\angle BAE = FAK$; dann schneidet AF und AF_1 die Berührungspunkte F und F_1 mit CE und BE aus. Der Berührungspunkt F_1 liegt hier also außerhalb der Strecke EG_1; folglich ist der Kegelschnitt eine Hyperbel; die Fußpunktskurve von A an die Hyperbel nimmt eine Form mit Doppelpunkt und zwei Schleifen an, deren Spezialfall die Lemniskate ist. Wie man sieht, liegt die eine Schleife innerhalb des ersten Äquilateralkreises, die andere außerhalb, der Doppelpunkt A natürlich auf dem Kreis.

123. Nach diesen Darlegungen übersehen wir jetzt die ganze Kegelschnittschar sehr leicht. Ist $\varkappa = 0$ (liegt der variable Punkt K also in C), so ist der Kegelschnitt eine Parabel; liegt $\varkappa$ zwischen 0 und $\beta - \gamma$, also K zwischen C und einem bestimmten Punkt K_1, wo $\angle CAK_1 = \beta - \gamma$, so erhält man eine Ellipse; für $\varkappa = \beta - \gamma$, wenn also K in K_1 zu liegen kommt, degeneriert der Kegelschnitt in eine Strecke und die Fußpunktskurve in ein Kreispaar, für $\varkappa > \beta - \gamma$ und K jenseits K_1 wird der Kegelschnitt eine Hyperbel.

124. Am Schluß von § 120 ist bereits angedeutet worden, daß es jedesmal einen doppelten geometrischen Ort für konstantes $\beta_f - \gamma_f$ gibt. Dies werden wir nun auf anderem Wege ganz allgemein bestätigt finden. Nämlich je zwei zusammengehörige Isomorphopole J und J' haben ähnliche Fußpunktsdreiecke, also auch gleiches $\beta_f - \gamma_f$. Und zwar hat für beide Punkte $\beta_f - \gamma_f$ auch das gleiche Zeichen; die Punkte sind dementsprechend gleichzeitig entweder beide innerhalb, oder beide außerhalb des ersten Äquilateralkreises (bei reziproker Transformation von O aus entspricht dieser Kreis sich selbst). Ist also eine beliebige Kurve als geometrischer Ort für konstantes $\beta_f - \gamma_f$ gefunden, so wird offenbar auch die reziproke Spiegelkurve (deren Punkte J' aus J so konstruiert werden, daß $OJ \cdot OJ' = r^2$) die nämliche Bedingung $\beta_f - \gamma_f = \delta$ erfüllen. Auch

die zweite Kurve muß nach dieser Konstruktionsart immer durch die drei Ecken gehen, und wir können an den Fig. 53 bis 55 leicht die Gestalt dieser Konkomitante eruieren. Denkt man sich etwa in Fig. 54 vom Zentrum O des Kreises ABC sämtliche Strahlen OJ, OJ_1, OJ_2 u. s. w. an die Fußpunktskurve der Ellipse gezogen, und zu J, J_1, J_2 je die reziproken Punkte J', J_1', J_2' u. s. w. gezogen, so bilden die letztgenannten Punkte die reziproke Konkomitante zu der ersten. Die Kurve bildet zwei Schleifen, hat einen Doppelpunkt in A und hat im allgemeinen die Gestalt, wie die Fußpunktskurve der Hyperbel in Fig. 55. Wir wissen ja auch, daß eine kurze Winkelrechnung (vgl. § 120 Schluß) uns einen neuen Punkt K auf der Achse CE liefern würde, der hier eben so läge, daß der zugehörige Kegelschnitt eine Hyperbel wäre.

Die Zeichnung macht augenscheinlich, daß auch die zweite Kurve als Deformation der Kreisdyade „Umkreis und erster Äquilateralkreis“ gefaßt werden kann, in welche sie im Spezialfall $\beta_f - \gamma_f = 0$ übergeht: die zwei Lunulae, welche je die zwei rechten und die zwei linken Seiten der Kreise miteinander bilden, sind hier zu den beiden lappenartigen Schleifen der Kurve deformiert. Konstruierten wir in Fig. 55 die Konkomitante, so würde abermals eine Figur mit zwei (ausgestülpten) Schleifen entstehen, die prinzipiell von der ersten nicht verschieden wäre. Beide Punkte K würden hier Hyperbeln als Kegelschnitte liefern.

Auch bei der Figur der Parabel (53) würden wir eine solche Kurve bekommen; diese würde durch O gehen müssen, welcher Punkt dem unendlich fernen Berührungspunkt der Parabel und ihrer Fußpunktskurve entsprechen würde. Auch eine Elementarbetrachtung zeigt, daß hier das Umkreiszentrum O auf der Kurve liegen muß; denn für O ist natürlich:

$$\beta_f - \gamma_f = \beta - \gamma.$$

Diese Betrachtung hat zugleich gelehrt, daß alle diese Kurven, die wir als geometrische Örter erhalten haben, durch reziproke Transformation in einander übergehen. Wir wollen die Kurven wegen ihrer Gestalt Nephroiden nennen, und

dann können wir den Hauptinhalt dieses Kapitels so zusammenfassen: Die geometrischen Örter für konstante Differenz zweier Winkel im Fußpunktsdreieck sind Nephroidenbüschel durch die drei Ecken des Grunddreiecks ABC.

125. Dies alles ist in genauester Übereinstimmung mit einem wichtigen Prinzip, das uns in latenter Form durch diese ganzen Ausführungen begleitet hat, und das nun zum Schluß noch deutlich ausgesprochen werden möge. Da nämlich zwei zusammengehörige Isomorphopole gleiche Form des Fußpunktsdreiecks liefern, so wird bei jedem geometrischen Ort, der sich auf Formelemente im Fußpunktsdreieck bezieht, stets zu einem beliebigen Punkt alsbald auch sein reziproker Punkt, und zu jeder Kurve alsbald auch ihre reziproke Kurve — auf den Umkreis bezogen — hinzutreten. So bekamen wir für konstantes a_f nicht nur éinen Kreis, sondern zwei, den einen durch J, den andern durch J'; für konstantes Verhältnis $b_f : c_f$ bekamen wir zwar nur éinen Kreis, der aber durch J und J' geht; der Kreis ist doppelt zu rechnen: als Orthogonalkreis an den Umkreis entspricht er bei reziproker Transformation sich selbst.

So wird man also bei jeder beliebigen Winkel- oder Verhältnisaufgabe stets zwei Örter bekommen, die zu einander reziprok sind: eine Kurve, die durch J, und eine zweite Kurve, die durch J' geht (in speziellen Fällen können sie auch zusammenfallen). So wird es sein, wenn z. B. $\angle(ta)_f$, d. h. der Winkel zwischen Transversale und Seite, konstant sein soll (Barytomik, § 36), oder $(t' t'')_f$, d. h. der Winkel zwischen zwei Transversalen (Grundlagen, § 145); oder der Winkel zwischen Barytome und Seite, oder zwischen zwei bestimmten Barytomen, oder der Brocardsche Winkel ω_f u. s. w.

Desgleichen bei Verhältnisaufgaben, z. B. wenn $a_f : h_f$ konstant sein soll (Grundlagen, § 114), oder $a_f : t_f$ (ib. 115), oder $h_f : t_f$ (ib. 113), oder $\frac{a_f^2 + b_f^2 + c_f^2}{J_f}$, und so fort.

Weitere Diskussionen und Anwendungen der Sätze dieses Kapitels muß ich mir für später aufsparen.

Inhaltsübersicht.

IV. Newtoniana.

V. Die Visierpunkte als (λ, μ, ν)-Spannpunkte des Dreiecks.

VI. Metrische Relationen an den Visierpunkten und Isomorphopolen.

VII. Die (λ, μ, ν)-Kardinalachse des Dreiecks und ihr Pol.

VIII. Konstanz der Spannweite im Fusspunktsdreieck.

IX. Winkeldifferenzen am Visierpunkt und im Fusspunktsdreieck.

*

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.

